Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 2

ГИДРОМЕХАНИКА

Н. А. СЛЕЗКИН

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 12 I 1951)

При изучении движения газа с учетом сжимаемости и вязкости к обычным дифференциальным уравнениям в переменных Эйлера присоединяется так называемое энергетическое уравнение. При составлении этого энергетического уравнения учитывается не только конвективный перенос тепла макроскопическим движением частиц, но и молекулярный перенос тепла с помощью теплопроводности.

Следовательно, при выводе энергетического уравнения неявно принимается гипотеза о том, что макроскопический конвективный и микроскопический молекулярный переносы тепла между собой независимы и поэтому аддитивны.

Если такая гипотеза об аддитивности макроскопического и микроскопического переносов может считаться справедливой по отношению к тепловой энергии, то с неменьшим основанием она должна считаться справедливой и по отношению к переносу самих масс. Следовательно, при выводе уравнения неразрывности необходимо наряду с конвективным переносом масс учесть и перенос масс, обусловленный молекулярными процессами самодиффузии и термодиффузии *.

Дадим вывод полных уравнений движения газа с единой точки зрения переноса: масс, импульса и энергии. При этом для самодиффузии и термодиффузии примем линейный закон.

Рассмотрим фиксированный в неподвижном пространстве элементарный параллелепипед в криволинейных ортогональных координатах q_1, q_2 и q_3 с длинами ребер $H_1\Delta q_1$, $H_2\Delta q_2$, $H_3\Delta q_3$. Соответственные компоненты скорости обозначим через v_1, v_2, v_3, векторы напряжений — через $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$.

За промежуток времени Δt в фиксированном параллелепипеде произойдет:

изменение массы на величину

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} H_1H_2H_3\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3\Delta t; \tag{1}$$

изменение вектора количества движения на величину

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} H_1H_2H_3\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3\Delta t; \tag{2}$$

* На необходимость учета диффузии при выводе уравнения неразрывности мы впервые обратили внимание в 1943 г. Затем в 1945 г. в курсе лекций по гидродинамике вязкой жидкости в Московском университете мною излагались полные дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости с единой точки зрения переноса с учетом диффузии. В 1946 г. на семинаре по гидродинамике, руководимом проф. Л. Н. Сретенским и мною, был сделан мною доклад об уравнении неразрывности с учетом самодиффузии.

изменение полной энергии, состоящей из кинетической энергии и внутренней энергии, на величину

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho V^2+\rho\varepsilon\right)H_1H_2H_3\Delta q_1\Delta q_2\Delta q_3\Delta t. \tag{3}$$

Будем предполагать, что внутри параллелепипеда нет источников образования масс, импульса и энергии. В таком случае внутри фиксированного параллелепипеда:

1) изменение массы может происходить только за счет входа и выхода масс через границы;

2) изменение количества движения может происходить не только за счет входа и выхода масс через границы, но и за счет действия импульса массовых сил и напряжений, распределенных по границам параллелепипеда;

3) изменение полной энергии может происходить не только за счет входа и выхода масс через границы, но и за счет переноса тепла процессом теплопроводности и, наконец, за счет элементарной работы массовых сил и напряжений (передачей тепла с помощью радиации мы пренебрегаем).

Через грань параллелепипеда, перпендикулярную к касательной к координатной линии q_1, за промежуток времени Δt внутрь параллелепипеда будет вноситься:
масса вследствие конвективного переноса

$$(\rho v_1H_2H_3)_{q_1}\Delta q_2\Delta q_3\Delta t; \tag{4}$$

масса вследствие самодиффузии и термодиффузии

$$-\left[\left(\frac{D}{H_1}\frac{\partial\rho}{\partial q_1}+\frac{\beta}{H_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)H_2H_3\right]_{q_1}\Delta q_2\Delta q_3\Delta t; \tag{5}$$

количество движения

$$\left[\left(\rho v_1-\frac{D}{H_1}\frac{\partial\rho}{\partial q_1}-\frac{\beta}{H_1}\frac{\partial H}{\partial q_1}\right)\mathbf{V}H_2H_3\right]_{q_1}\Delta q_2\Delta q_3\Delta t; \tag{6}$$

полная энергия вследствие конвективного переноса

$$\left[\left(\rho v_1-\frac{D}{H_1}\frac{\partial\rho}{\partial q_1}-\frac{\beta}{H_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)\left(\frac{1}{2}\rho V^2+\rho\varepsilon\right)H_2H_3\right]_{q_1}\Delta q_2\Delta q_3\Delta t; \tag{7}$$

тепловая энергия вследствие теплопроводности и градиента плотности

$$-\frac{1}{A}\left[\left(\frac{\beta}{H_1}T\frac{\partial\rho}{\partial q_1}+\frac{\lambda'}{H_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)H_2H_3\right]_{q_1}\Delta q_2\Delta q_3\Delta t. \tag{8}$$

Элементарный импульс и элементарная работа сил напряжений, распределенных по рассматриваемой грани, будут представляться в виде

$$-(\mathbf{p}_1H_2H_3)_{q_1}\Delta q_2\Delta q_3\Delta t; \tag{9}$$

$$-(\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{V}H_2H_3)_{q_1}\Delta q_2\Delta q_3\Delta t. \tag{10}$$

Рассматривая противоположную грань, мы получим те же формулы (4)—(10), но со значком $q_1+\Delta q_1$. Составляя разность соответственных выражений, мы получим те количества массы, количества движения и полной энергии, которые задерживаются внутри параллелепипеда.

Аналогичные рассуждения можно провести и по двум парам остальных граней.

Суммируя задержавшиеся внутри параллелепипеда массы, количества движения и энергии и приравнивая, соответственно, (1), (2) и (3), получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\left(\rho v_1-\frac{D}{H_1}\frac{\partial\rho}{\partial q_1}-\frac{\beta}{H_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)H_2H_3\right]+\right.$$
$$+\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\left(\rho v_2-\frac{D}{H_2}\frac{\partial\rho}{\partial q_2}-\frac{\beta}{H_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}\right)H_3H_1\right]+$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\left(\rho v_3-\frac{D}{H_3}\frac{\partial\rho}{\partial q_3}-\frac{\beta}{H_3}\frac{\partial T}{\partial q_3}\right)H_1H_2\right]\right\}=0; \qquad (11)$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\left(\rho v_1-\frac{D}{H_1}\frac{\partial\rho}{\partial q_1}-\frac{\beta}{H_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)H_2H_3\mathbf{V}\right]+\right.$$
$$+\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\left(\rho v_2-\frac{D}{H_2}\frac{\partial\rho}{\partial q_2}-\frac{\beta}{H_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}\right)H_3H_1\mathbf{V}\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\left(\rho v_3-\frac{D}{H_3}\frac{\partial\rho}{\partial q_3}-\frac{\beta}{H_3}\frac{\partial T}{\partial q_3}\right)H_1H_2\mathbf{V}\right]=$$
$$=\rho\mathbf{F}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3\mathbf{p}_1)+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1\mathbf{p}_2)+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2\mathbf{p}_3)\right]; \qquad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho V^2+\rho\varepsilon\right)+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\left(\rho v_1-\frac{D}{H_1}\frac{\partial\rho}{\partial q_1}-\frac{\beta}{H_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)\left(\frac{1}{2}V^2+\varepsilon\right)H_2H_3\right]+\right.$$
$$+\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\left(\rho v_2-\frac{D}{H_2}\frac{\partial\rho}{\partial q_2}-\frac{\beta}{H_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}\right)\left(\frac{1}{2}V^2+\varepsilon\right)H_3H_1\right]+$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\left(\rho v_3-\frac{D}{H_3}\frac{\partial\rho}{\partial q_3}-\frac{\beta}{H_3}\frac{\partial T}{\partial q_3}\right)\left(\frac{1}{2}V^2+\varepsilon\right)H_1H_2\right]\right\}=$$
$$=\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{V}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3\,\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{V})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1\,\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{V})+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2\,\mathbf{p}_3\cdot\mathbf{V})\right]+$$
$$+\frac{1}{AH_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\left(\beta\frac{T}{H_1}\frac{\partial\rho}{\partial q_1}+\frac{\lambda}{H_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)H_2H_3\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\left(\beta\frac{T}{H_2}\frac{\partial\rho}{\partial q_2}+\frac{\lambda}{H_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}\right)H_3H_1\right]+\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\left(\beta\frac{T}{H_3}\frac{\partial\rho}{\partial q_3}+\frac{\lambda}{H_3}\frac{\partial T}{\partial q_3}\right)H_1H_2\right]\right\}. \qquad (13)$$

Полученные уравнения (11), (12) и (13) являются общими дифференциальными уравнениями движения газов в криволинейных ортогональных координатах.

В случае декартовых осей координат мы можем положить

$$q_1=x_1,\quad q_2=x_2,\quad q_3=x_3,\quad H_1=H_2=H_3=1.$$

Тогда уравнения (11), (12) и (13) могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho v_i-D\frac{\partial\rho}{\partial x_i}-\beta\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)=0; \qquad (14)$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t}+\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\rho v_i-D\frac{\partial\rho}{\partial x_i}-\beta\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\mathbf{V}\right]=\rho\mathbf{F}+\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial\mathbf{p}_i}{\partial x_i}; \qquad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho V^2+\rho\varepsilon\right)+\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\rho v_i-D\frac{\partial\rho}{\partial x_i}-\beta\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\left(\frac{1}{2}V^2+\varepsilon\right)\right]=$$

$$=\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{V}+\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{V})+\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\beta T\frac{\partial\rho}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\frac{1}{A}. \tag{16}$$

Если учесть уравнение неразрывности (14), то основное векторное уравнение (15) представится в виде

$$\rho\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{i=3}\left(\rho v_i-D\frac{\partial\rho}{\partial x_i}-\beta\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x_i}=\rho\mathbf{F}+\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial\mathbf{p}_i}{\partial x_i}. \tag{17}$$

Таким образом, если в уравнении неразрывности учесть перенос масс с помощью самодиффузии и термодиффузии, то в основное уравнение движения будут входить дополнительные слагаемые, содержащие произведения частных производных от плотности, температуры и макроскопических скоростей.

Уравнение (16) при учете (14) и (17) представится в виде

$$\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\sum_{i=1}^{i=3}\left(\rho v_i-D\frac{\partial\rho}{\partial x_i}-\beta\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{i=3}\mathbf{p}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\beta T\frac{\partial\rho}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\frac{1}{A}. \tag{18}$$

Таким образом, при полном учете молекулярных процессов задача изучения движения газа будет сводиться к совместному решению дифференциальных уравнений (14), (17) и (18), к которым следует еще присоединить: 1) соотношения обобщенного закона Ньютона для напряжений; 2) уравнение физического состояния; 3) уравнение, представляющее удельную внутреннюю энергию через температуру.

Еще раз подчеркнем, что уравнения (14), (17) и (18) установлены при гипотезе аддитивности макроскопического и микроскопического переносов. Эта гипотеза будет иметь оснований тем больше, чем больше будут градиенты температур и плотностей при движении газа.

Явление вязкости, как известно, объясняется молекулярными процессами переноса вектора количества движения. Следовательно, при введении сил вязкости неявно также используется гипотеза о независимости и аддитивности макроскопического и микроскопического переносов количества движения. Поэтому не случайно эта гипотеза более всего оправдывается там, где имеется наибольший градиент скоростей в поперечном направлении, т. е. в пределах пограничного слоя.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
4 I 1951