Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 2

ГИДРОМЕХАНИКА

М. Н. РЕЙНОВ

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА СКОРОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ ПОГРУЖЕННЫХ В НЕЕ ТЕЛ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 4 XII 1950)

Н. Е. Кочин дал самое общее решение задачи о волновом движении, возникающем в жидкости при горизонтальном, прямолинейном и равномерном движении твердого тела произвольной формы.

Если тело перемещается со скоростью c, то потенциал скорости указанного движения жидкости в точке (x, y, z) имеет вид [1]:

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(G\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n}\varphi\right) dS, \tag{1}$$

где $S(\xi, \eta, \zeta)$ — поверхность тела; n — внешняя нормаль к поверхности S, а функция

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}} +$$
$$+\frac{2g}{c^2}U\left(\frac{g}{c^2}\{x-\xi\}, \frac{g}{c^2}\{y-\eta\}, \frac{g}{c^2}\{z+\zeta\}\right), \tag{2}$$

причем

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \operatorname{Re} i\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp\left[(i\alpha\cos\theta + i\beta\sin\theta - \gamma)\sec^2\theta\right]\sec^2\theta\, d\theta -$$
$$-\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \text{v. p.}\int\limits_0^{\infty} \exp\left[\lambda(i\alpha\cos\theta + i\beta\sin\theta - \gamma)\sec^2\theta\right]\frac{\lambda\sec^2\theta}{\lambda - 1}\, d\lambda\, d\theta. \tag{3}$$

При вычислении потенциала $\varphi(x, y, z)$ определение функции $U(\alpha, \beta, \gamma)$ представляет большую трудность, если поверхность $S(\xi, \eta, \zeta)$ не задана аналитически. Действительно, в этом случае в общем выражении для потенциала $\varphi(x, y, z)$ приходится менять местами поверхностный интеграл и интегралы, связанные с вспомогательными переменными θ и λ, затем с помощью каких-то приближенных способов вычислять как тот, так и другие интегралы.

Вычислительная работа сокращается в значительной степени, если протабулировать заранее интегралы, дающие функцию $U(\alpha, \beta, \gamma)$ в зависимости от параметров α, β и γ. Этим мы и займемся в дальнейшем.

Рассмотрим сначала функции:

$$Q(\alpha, \beta, \gamma) = 2\int\limits_0^{\pi/2} \exp(i\alpha \sec\theta - \gamma \sec^2\theta) \cos(\beta \sec^2\theta \sin\theta) \sec\theta \, d\theta; \qquad (4)$$

$$P(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\pi} \text{ v. p.} \int\limits_0^{\infty} iQ(\alpha\lambda, \beta\lambda, \gamma\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda - 1}. \qquad (5)$$

Вводя подставку $\sec\theta = \operatorname{ch}\psi$ и используя зависимости

$$e^{i\alpha \operatorname{ch}\psi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\alpha) \operatorname{ch} n\psi;$$

$$e^{-\gamma/2} K_p(q) \cos p\delta = 2\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma \operatorname{ch}^2\psi} \cos({}^1/_2\, \beta \operatorname{sh} 2\psi) \operatorname{ch} 2p\psi \, d\psi, \qquad (6)$$

где $2qe^{i\delta} = \gamma + i\beta$, получаем представление функции $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ в виде ряда

$$Q(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-\gamma/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\alpha) K_{n/2}(q) \cos\frac{n\delta}{2}. \qquad (7)$$

После этого можно вычислить и функцию $P(\alpha, \beta, \gamma)$. Действительно, интеграл (5), дающий эту функцию, преобразовывается так:

$$P(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{i}{\pi} \text{ v. p.} \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{\lambda} Q\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda}\right) - Q(\alpha\lambda, \beta\lambda, \gamma\lambda)\right] \frac{d\lambda}{1-\lambda}. \qquad (8)$$

Приближенным интегрированием в этом равенстве функция $P(\alpha, \beta, \gamma)$ определяется с любой степенью точности. При этом на границах участка $[0, 1]$ подинтегральное выражение

$$A(\lambda) = \left[\frac{1}{\lambda} Q\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda}\right) - Q(\alpha\lambda, \beta\lambda, \gamma\lambda)\right] \frac{1}{1-\lambda}$$

имеет следующие значения:

$$\operatorname{Im} A(0) = \lim_{\lambda\to 0} \operatorname{Im} A(\lambda) = 0;$$

$$A(1) = \lim_{\lambda\to 1} A(\lambda) = 2\left|\frac{\partial Q(\alpha\lambda, \beta\lambda, \gamma\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=1} + Q(\alpha, \beta, \gamma).$$

Отметим также, что из приведенных выше выражений вытекает:

$$Q^*(\beta, \gamma) = 2\int\limits_0^{\pi/2} \cos(\beta \sec^2\theta \sin\theta) \exp(-\gamma \sec^2\theta) [\sec\theta - i \sec^2\theta] \, d\theta =$$

$$= e^{-\gamma/2} \left[K_0(q) - iK_{1/2}(q) \cos\frac{\delta}{2}\right] \qquad (9)$$

и

$$P_n^*(\beta, \gamma) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \text{ v. p.} \int\limits_0^{\infty} Q^*(\beta\lambda, \gamma\lambda) \frac{\lambda^{n+1}}{\lambda - 1} d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2q\sqrt{\pi}} \sum_{k=-n}^{\infty} \left(-k - \frac{1}{2}\right)! \left(\frac{\gamma}{2} + q\right)^k. \qquad (10)$$

После этого общие формулы для функций $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ и $P(\alpha, \beta, \gamma)$ можно получить с помощью величин $Q^*(\beta, \gamma)$ и $P^*(\beta, \gamma)$, а именно:

$$Q(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} \operatorname{Re} \frac{\partial^m}{\partial \gamma^m} [i^n Q^*(\beta, \gamma)], \tag{11}$$

m равно целой части $n/2$;

$$\operatorname{Re} P(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^n P_n^*(\beta, \gamma)}{\partial \gamma^n}, \ \alpha < \frac{\gamma}{2} + q. \tag{12}$$

Возвращаясь к выражению для потенциала скорости $\varphi(x, y, z)$, точнее, к формуле (3) для функции $U(\alpha, \beta, \gamma)$, замечаем, что введенные нами функции $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ и $P(\alpha, \beta, \gamma)$ позволяют заменить равенство (3) следующим:

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \alpha} [Q(\alpha, \beta, \gamma) + P(\alpha, \beta, \gamma)]. \tag{13}$$

Следовательно, протабулировав функции $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ и $P(\alpha, \beta, \gamma)$ и их производные на основании тех формул, которые были приведены выше, можно будет свести определение потенциала $\varphi(x, y, z)$ к приближенному вычислению поверхностного интеграла (1), что нетрудно сделать для любого вида поверхности $S(\xi, \eta, \zeta)$.

Табуляция функций $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ и $P(\alpha, \beta, \gamma)$ с помощью рядов (7), (11) и (12) не всегда удобна. При некоторых значениях параметров α, β и γ эти ряды сходятся достаточно медленно и вычислительная работа оказывается очень трудоемкой. Поэтому приведем некоторые формулы, дающие указанные функции в асимптотическом представлении.

В частности, если заменить в интеграле (4) множитель $\exp(-\gamma \sec^2\theta)$ выражением:

$$e^{-\mu^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos 2\mu t \, dt, \tag{14}$$

положив в нем $\mu = \sqrt{\pi} \sec^2\theta$, а затем использовать известные равенства теории бесселевых функций, то можно получить

$$iQ(\alpha, 0, \gamma) = -\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t^2} H_0^{(1)}(\alpha + 2t\sqrt{\gamma})\, dt -$$

$$-\sqrt{\pi} \int_0^{\alpha/2\sqrt{\gamma}} e^{-t^2} H_0^{(1)}(\alpha - 2t\sqrt{\gamma})\, dt + \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t^2} H_0^{(2)}(2t\sqrt{\gamma} - \alpha)\, dt. \tag{15}$$

При $\alpha/2\sqrt{\gamma} \to \infty$ последнее равенство легко вычисляется путем разложения в ряд по степеням величины $2t\sqrt{\gamma}$ бесселевых функций $H_0^{(1)}(\alpha + 2t\sqrt{\gamma})$ и $H_0^{(1)}(\alpha - 2t\sqrt{\gamma})$, в результате чего для функции $Q(\alpha, 0, \gamma)$ получается следующее асимптотическое разложение:

$$Q(\alpha, 0, \gamma) \approx i\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{n!} H_0^{(1)(2n)}(\alpha). \tag{16}$$

Здесь $H_0^{(1)(2n)}(\alpha)$ обозначает производную $2n$-го порядка от функции $H_0^{(1)}(\alpha)$ по аргументу α.

Для функции $\operatorname{Re}\frac{\partial P(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\alpha}$ можно получить асимптотическое представление из формулы (3), где она выражается вторым интегралом. Действительно, выполнив здесь интегрирование по переменной λ, получаем:

$$\operatorname{Re}\frac{\partial P(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\alpha}=-\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{u}-e^{-u}\operatorname{Ei}u\right)\sec^2\theta\,d\theta\approx$$

$$\approx\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1!}{u^2}+\frac{2!}{u^3}+\frac{3!}{u^4}+\cdots\right)\sec^2\theta\,d\theta, \tag{17}$$

где $u=(\gamma-i\alpha\cos\theta-i\beta\sin\theta)\sec^2\theta$.

Имея равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{\gamma-i\alpha\cos\theta-i\beta\sin\theta}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}, \tag{18}$$

из которого интегрированием и дифференцированием по параметрам α и γ можно находить выражения для слагаемых ряда (17), выводим, например:

$$\left|\operatorname{Re}\frac{\partial P(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\alpha}\right|_{\beta=0}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\gamma^n}\left\{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{2n}\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}-\frac{1}{\gamma\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(k-{}^1/_2)!}{k!}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{2k}\right]\right\}. \tag{19}$$

В заключение отметим, что интегралы вида (4) и (5) входят не только в формулу для потенциала $\varphi(x,y,z)$, но и в выражения для сил и моментов, действующих на движущееся тело, в выражения для давления в жидкости и ординат свободной поверхности и т. д. Следовательно, табулирование функций $Q(\alpha,\beta,\gamma)$ и $P(\alpha,\beta,\gamma)$ и их производных позволит быстро вычислять и эти величины.

Поступило
4 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Е. Кочин, О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел, Собр. соч., 2, изд. АН СССР, 1949.