Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

Ю. СМИРНОВ

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ МЕТРИЗУЕМОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 8 I 1951)

Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы топологическое пространство было метризуемо (т. е. гомеоморфно метрическому пространству), было впервые дано П. С. Александровым и П. С. Урысоном в 1923 г. ([1]). Однако эти авторы не считали данное ими решение проблемы метризации удовлетворительным (см., например, ([2]), стр. 263, где это решение прямо называется „мало пригодным“), — очевидно, ввиду искусственного характера содержащегося в нем условия. Эта искусственность проявляется, в частности, и в том, что основные метризационные условия для пространств со счетной базой и для компактных пространств не являются частными случаями общей метризационной теоремы П. С. Александрова и П. С. Урысона. Многочисленные предложенные впоследствии другими авторами метризационные теоремы (см., например, ([3], [4])) не представляют преимуществ сравнительно с теоремой Александрова и Урысона.

Здесь я даю новое решение общей метризационной проблемы, свободное от указанных недостатков и представляющееся мне окончательным.

Теорема 1. *Для того чтобы топологическое пространство R было метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было регулярно и чтобы в нем существовало счетное множество локально конечных* покрытий, объединение которых является базой пространства R.*

Прежде чем доказывать эту теорему, покажем, что в ней в качестве частных случаев содержатся метризационные теоремы П. С. Урысона для пространств со счетной базой и для компактных пространств. В самом деле, если R — регулярное пространство, а $\gamma = \{\Gamma_n\}$ — некоторая его счетная база, то взяв для каждого Γ_n точку $x_n \in \Gamma_n$, получим счетную систему конечных покрытий $\gamma_n = \{\Gamma_n, R \setminus x_n\}$. Объединение всех этих покрытий γ_n также является базой пространства R. Стало быть, согласно нашей теореме, пространство R метризуемо. Итак, всякое регулярное пространство со счетной базой (значит, в частности, всякое компактное хаусдорфово пространство со счетной базой) метризуемо.

Доказательство теоремы 1. Необходимость нашего условия следует из того, что всякое метрическое пространство паракомпактно (т. е. что в каждое покрытие метрического пространства можно вписать локально конечное покрытие([5])). Действительно, отсюда

* Покрытие пространства R (открытыми множествами) называется локально конечным, если каждая точка пространства R имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом элементов данного покрытия.

сразу вытекает существование счетного множества таких локально конечных покрытий γ_n данного метрического пространства R, что каждый элемент покрытия γ_n имеет диаметр $< 1/n$. Но тогда объединение покрытий γ_n является базой пространства R.

Для доказательства достаточности нашего условия предположим, что в регулярном пространстве R дана счетная последовательность локально конечных покрытий $\gamma_n = \{\Gamma_{n\alpha}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, объединение которых является базой γ пространства R. Покажем, что тогда R метризуемо.

Лемма. *Сумма замыканий любого числа элементов данного локально конечного покрытия равна замыканию суммы этих элементов.*

Доказательство этой леммы не представляет затруднений.

1. Пространство R нормально. Возьмем два непересекающихся замкнутых множества A и B пространства R. Для каждой точки $x \in A$ возьмем принадлежащую базе γ окрестность $\Gamma_{n(x)\alpha(x)}$ точки x такую, что $[\Gamma_{n(x)\alpha(x)}] \cap B = \Lambda$*. Для каждой точки $y \in B$ возьмем окрестность $\Gamma_{n(y)\alpha(y)}$ из базы γ такую, что $[\Gamma_{n(y)\alpha(y)}] \cap A = \Lambda$. Очевидно, что $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} \Gamma_{n(x)\alpha(x)}$ и $B \subseteq \bigcup\limits_{y \in B} \Gamma_{n(y)\alpha(y)}$. Обозначим через G_n сумму (по всем $x \in A$) тех $\Gamma_{n(x)\alpha(x)}$, для которых $n(x) = n$, а через H_n — сумму (по всем $y \in B$) тех $\Gamma_{n(y)\alpha(y)}$, для которых $n(y) = n$. В силу леммы $[G_n] = \bigcup\limits_{x \in A} [\Gamma_{n\alpha(x)}]$ и $[H_n] = \bigcup\limits_{y \in B} [\Gamma_{n\alpha(y)}]$. Поэтому для любого n имеем: $[G_n] \cap B = \Lambda$ и $[H_n] \cap A = \Lambda$. Положим для каждого $n = 1, 2, \ldots$ $U_n = G_n \diagdown \bigcup\limits_{k \leqslant n} [H_k]$, $V_n = H_n \diagdown \bigcup\limits_{k \leqslant n} [G_k]$.

Тогда $U = \bigcup\limits_n U_n$ и $V = \bigcup\limits_n V_n$ оказываются непересекающимися окрестностями множеств A и B, чем нормальность пространства R доказана.

2. Всякое открытое множество пространства R имеет тип F_σ. В самом деле, пусть G — произвольное открытое множество пространства R. Так как R регулярно, то для каждой точки $x \in G$ существует принадлежащая базе γ окрестность $\Gamma_{n(x)\alpha(x)}$, замыкание которой лежит в G. Положим снова $G_n = \bigcup\limits_{x \in G} \Gamma_{n\alpha(x)}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ В силу леммы $[G_n] = \bigcup\limits_{x \in G} [\Gamma_{n\alpha(x)}]$, значит, $G = \bigcup\limits_n [G_n]$, ч. и т. д.

3. Пространство R гомеоморфно некоторому множеству обобщенного гильбертова пространства H^τ веса τ, где τ — мощность базы γ пространства R. Как известно, пространством H^τ называется следующим образом определенное метрическое пространство. Пусть Θ — некоторое множество индексов ϑ мощности τ. Точкой пространства H^τ называется всякая действительная функция $\xi(\vartheta) = \xi_\vartheta$, определенная на Θ и удовлетворяющая условию: лишь для счетного числа ϑ значение $\xi(\vartheta)$ может быть отлично от нуля, причем сумма $\Sigma \xi^2(\vartheta)$ квадратов этих значений конечна. Расстояние между точками ξ и η пространства H^τ дается формулой $\rho(\xi, \eta) = \sqrt{\sum\limits_{\vartheta \in \Theta} (\xi(\vartheta) - \eta(\vartheta))^2}$. Легко проверить, что расстояние между любыми двумя точками из H^τ конечно и удовлетворяет аксиомам метрического пространства.

Построим топологическое отображение f пространства R в H^τ (за Θ мы берем множество всех пар $\vartheta = (n\alpha)$). Так как R нормально и так как каждое открытое множество в R имеет тип F_σ, то для каждого $\Gamma_{n\alpha}$ можно построить непрерывную функцию $p_{n\alpha}(x)$, удовлетворяющую

* Квадратные скобки означают замыкание; Λ — пустое множество.

условию $0 \leqslant p_{n\alpha}(x) \leqslant 1$ для всех $x \in R$ и обращающуюся в нуль во всех точках $x \in R \setminus \Gamma_{n\alpha}$ и только в них. Так как γ_n есть локально конечное покрытие, то в каждой точке $x \in R$ при данном n лишь конечное число $\geqslant 1$ функций $p_{n\alpha}$ отлично от нуля. Поэтому сумма $\sum\limits_{\alpha} p_{n\alpha}^2(x)$ имеет смысл для любого $x \in R$ и представляет положительную и непрерывную во всем R функцию. Тогда и функции

$$q_{n\alpha}(x) = \frac{p_{n\alpha}(x)}{\sqrt{\sum\limits_{\alpha} p_{n\alpha}^2(x)}}$$

определены и непрерывны на всем R, причем $\sum\limits_{\alpha} q_{n\alpha}^2(x) = 1$ и $\sum\limits_{\alpha} (q_{n\alpha}(x) - q_{n\alpha}(y))^2 \leqslant 2$ для любых $x \in R$, $y \in R$. Далее применяем хорошо известную конструкцию Урысона — Тихонова.

Положив $\xi_{n\alpha}(x) = \frac{q_{n\alpha}(x)}{2^n}$, видим, что

$$\sum_{n,\alpha} \xi_{n\alpha}^2(x) = \sum_{n} \frac{1}{2^n} \sum_{\alpha} q_{n\alpha}^2(x) = \sum_{n} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Значит, $\{\xi_{n\alpha}(x)\}$, где $x \in R$ произвольно, но фиксировано, а $\vartheta = (n\alpha)$ пробегает все Θ, есть точка пространства H^τ, которую обозначим через $f(x)$. Получаем отображение f пространства R на некоторое множество $f(R) \subset H^\tau$.

А. Отображение f взаимно-однозначно. В самом деле, если x и y — две различные точки пространства R, то существует некоторое $\Gamma_{n\alpha}$, содержащее x и не содержащее y. Тогда $\xi_{n\alpha}(x) > 0$, $\xi_{n\alpha}(y) = 0$ и, значит, $f(x) \neq f(y)$.

Б. Отображение f непрерывно. Пусть $x \in R$ и $\varepsilon > 0$ выбраны произвольно. Возьмем такое натуральное число N, что $1/2^N < \varepsilon^2/4$. Окрестность Ux точки x выберем так, чтобы она пересекалась лишь с конечным числом элементов каждого покрытия γ_n, у которого $n \leqslant N$. Отметим те пары индексов $(n\alpha)$, для которых $n \leqslant N$ и $Ux \cap \Gamma_{n\alpha} \neq \Lambda$. Число всех отмеченных пар конечно; мы его обозначим через S. Возьмем столь тесную окрестность $Ox \subseteq Ux$ точки x, чтобы для любой функции $\xi_{n\alpha}$, у которой индексы n, α образуют отмеченную пару, при любом $y \in Ox$ было выполнено неравенство

$$|\xi_{n\alpha}(x) - \xi_{n\alpha}(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2S}}. \tag{1}$$

Если при $n \leqslant N$ пара $(n\alpha)$ не является отмеченной, то Ox не пересекается с $\Gamma_{n\alpha}$, и поэтому $\xi_{n\alpha}(x) = \xi_{n\alpha}(y) = 0$. Отсюда и из (1) следует неравенство

$$\sum_{n \leqslant N,\, \alpha} (\xi_{n\alpha}(x) - \xi_{n\alpha}(y))^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{2}$$

Согласно выбору числа N имеем, далее,

$$\sum_{n > N,\, \alpha} (\xi_{n\alpha}(x) - \xi_{n\alpha}(y))^2 = \sum_{n > N} \frac{1}{2^n} \sum_{\alpha} (q_{n\alpha}(x) - q_{n\alpha}(y))^2 \leqslant \frac{2}{2^N} < \frac{\varepsilon^2}{2}, \tag{3}$$

так что $\rho(f(x), f(y)) = \sqrt{\sum\limits_{n,\alpha} (\xi_{n\alpha}(x) - \xi_{n\alpha}(y))^2} < \varepsilon$, чем непрерывность отображения f доказана.

Покажем, наконец, что взаимно-однозначное непрерывное отображение f открыто — этим будет доказано, что f — топологическое отображение. Пусть точка $x \in R$ и ее окрестность Ox выбраны произвольно. Возьмем $\Gamma_{n\alpha} \in \gamma$ так, чтобы $x \in \Gamma_{n\alpha} \subseteq Ox$ и положим $\varepsilon = \xi_{n\alpha}(x) > 0$. Тогда, если для некоторого $y \in R$ мы имеем $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$, то $\xi_{n\alpha}(y) > 0$ и, значит, $y \in \Gamma_{n\alpha}$. Другими словами, $f(\Gamma_{n\alpha}) \supseteq O(f(x), \varepsilon)$, чем все доказано.

Замечание. Легко привести пример нерегулярного хаусдорфова пространства, у которого имеется счетная система конечных покрытий, объединение которых является базой этого пространства.

Приведем без доказательства следующее предложение, примыкающее к нашей метризационной теореме.

Теорема 2. *Если нормальное пространство R имеет локально конечное покрытие, каждый элемент которого является метризуемым пространством, то и все пространство R метризуемо.*

Следствие. *Всякое паракомпактное локально метризуемое пространство метризуемо.*

При этом пространство называется локально метризуемым, если каждая его точка имеет метризуемую окрестность.

Поступило
27 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров и П. С. Урысон, C. R., **177**, 1274 (1923). [2] П. С. Урысон, Math. Ann., **94**, 262 (1925). [3] E. W. Chittenden, Bull. Am. Math. Soc., Jan.—Febr., 13 (1927). [4] I. W. Tuckey, Uniformity and Convergence in Topology, Princeton, 1942. [5] A. H. Stone, Bull. Am. Math. Soc., **54**, Oct., 977 (1948).