Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

А. Г. ПОСТНИКОВ

ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН В ТАУБЕРОВОЙ ТЕОРЕМЕ ХАРДИ И ЛИТТЛЬВУДА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 19 XII 1950)

Теорема Харди и Литтльвуда (1) утверждает, что если $(1-x)\sum\limits_{x\to 1-0} a_n x^n \to 1$ и $a_n \geqslant 0$, то $\sum\limits_{n\leqslant P} a_n \sim P$. Аналогично для рядов Дирихле: если $\sigma\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}\to 1$, когда $\sigma\to 0+0$ и $a_n\geqslant 0$, то $\sum\limits_{\lambda_n\leqslant P} a_n\sim P$.

Допустим, что известно больше про поведение функции на вещественной оси, скажем, $\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}=\frac{1}{\sigma}+O(1)$ и $a_n\geqslant 0$. Что можно сказать больше про асимптотическое поведение коэффициентов?

Теорема. *Если* $\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}=\frac{1}{\sigma}+O(1)$ *и* $a_n\geqslant 0$, $\lambda_n\geqslant 0$, *то* $\sum\limits_{\lambda_n\leqslant P} a_n = P+O\left(\frac{P}{\sqrt{\ln P}}\right)$.

Доказательство. Пусть $\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}=\frac{1}{\sigma}+O(1)$, $a_n\geqslant 0$. Обозначим $\Phi(\sigma)=\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}$. Пусть

$$F(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_Nx^N,$$

$$\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}F(e^{-\lambda_n\sigma})=\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}(b_0+b_1e^{-\lambda_n\sigma}+\cdots+b_Ne^{-\lambda_n\sigma N})=$$

$$=b_0\Phi(\sigma)+b_1\Phi(2\sigma)+\cdots+b_N\Phi((N+1)\sigma)=$$

$$=\frac{b_0}{\sigma}+\frac{b_1}{2\sigma}+\cdots+\frac{b_N}{(N+1)\sigma}+O\left(\sum_{i=0}^{N}|b_i|\right)=\frac{\int_0^1 F(x)\,dx}{\sigma}+O\left(\sum_{i=0}^{N}|b_i|\right).$$

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на $[0,1]$ и $|f(x)|\leqslant M$. Пусть $P_N(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_Nx^N$ — многочлен, наименее уклоняющийся от $f(x)$ на $[0,1]$, $E_N=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-P_N(x)|$. Очевидно, что при $N\geqslant 0$ $E\leqslant M$. Поэтому $|P_N(x)|\leqslant 2M$.

Оценим величину $|b_0|+\cdots+|b_N|$ для многочлена $P_N(x)$. По известному предложению теории наилучших приближений (2), модуль b_i, $i=0,1,\ldots,N$, меньше или равен модулю коэффициента при x^i многочлена $2M\cos N\arccos(2x-1)=M((2x-1+\sqrt{4x^2-4x})^N+(2x-1-\sqrt{4x^2-4x})^N)$.

Модули коэффициентов этого многочлена не превосходят, очевидно, модулей многочлена $M\ ((2x+1+\sqrt{4x^2+4x})^N+(2x+1-\sqrt{4x^2+4x})^N)$, а сумма $\Sigma|b_i|$ не превосходит значения прежнего многочлена при $x=1$. Таким образом, имеем: $\sum\limits_{i=0}^{N}|b_i|<2M(3+\sqrt{8})^N=O(M6^N)$.

Рассмотрим $\sigma\Sigma a_n e^{-\lambda_n\sigma}(fe^{-\lambda_n\sigma})$. Ряд абсолютно сходится в силу ограниченности $f(x)$,

$$\sigma\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}f(e^{-\lambda_n\sigma})=\sigma\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}P_N(e^{-\lambda_n\sigma})+\sigma\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}(f(e^{-\lambda_n\sigma})-P_N(e^{-\lambda_n\sigma}))=$$

$$=\int\limits_0^1 f(x)\,dx+\int\limits_0^1(P_N(x)-f(x))\,dx+\sigma\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}P_N(e^{-\lambda_n\sigma})-$$

$$-\int\limits_0^1 P_N(x)\,dx+\sigma\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}(f(e^{-\lambda_n\sigma})-P_N(e^{-\lambda_n\sigma})).$$

Через $\omega(\delta)$ обозначим модуль непрерывности $f(x)$. Как известно, $|f(x)-P_N(x)|<12\,\omega\left(\frac{1}{2N}\right)$. Поэтому:

$$\sigma\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}(f(e^{-\lambda_n\sigma})-P_N(e^{-\lambda_n\sigma}))=O\left(\sigma\left(\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}\right)\omega\left(\frac{1}{2N}\right)\right)=O\left(\omega\frac{1}{2N}\right)$$

(ибо $\sigma\Sigma a_n e^{-\lambda_n\sigma}\to 1$);

$$\int\limits_0^1(P_N(x)-f(x))\,dx=O\left(\omega\left(\frac{1}{2N}\right)\right).$$

Далее,

$$\sigma\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}P_N(e^{-\lambda_n\sigma})=\int\limits_0^1 P_N(x)\,dx+O(M6^N\sigma).$$

Поэтому

$$\sigma\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}f(e^{-\lambda_n\sigma})=\int\limits_0^1 f(x)\,dx+O(M6^N\sigma)+O\left(\omega\left(\frac{1}{2N}\right)\right).$$

Возьмем $N=\left[\frac{\eta}{\ln 5}\ln\frac{1}{\sigma}\right]$, $0<\eta<1$, η любое. Когда $\sigma\to 0$, $N\to\infty$.

Лемма.

$$\sigma\sum a_n e^{-\lambda_n\sigma}f(e^{-\lambda_n\sigma})=\int\limits_0^1 f(x)\,dx+O(M\sigma^{1-\eta})+O\left(\omega\left(\frac{1}{\frac{2\eta}{\ln 5}\ln\frac{1}{\sigma}}\right)\right),$$

где O зависит лишь от ряда.

Будем брать далее $\eta=1/2$, $\sigma=1/P$.

Возьмем функцию $f_1(x)$, $\alpha>1$, $\alpha\to 1$:

$$f_1(x)=\begin{cases}0 & \text{для } 0\leqslant x\leqslant e^{-\alpha};\\ \frac{e}{e^{-1}-e^{-\alpha}}(x-e^{-\alpha}) & \text{для } e^{-\alpha}\leqslant x\leqslant e^{-1};\\ \frac{1}{x} & \text{для } e^{-1}\leqslant x\leqslant \frac{1}{x}.\end{cases}$$

Очевидно:

$$M=e, \quad \omega(\delta)=\frac{e}{e^{-1}-e^{-\alpha}}\,\delta, \quad \int_0^1 f_1(x)\,dx=\frac{1-e^{1-\alpha}}{2}+1.$$

Но $1-e^{1-\alpha}\sim\alpha-1$, $\omega(\delta)=O\left(\frac{\delta}{\alpha-1}\right)$, $\int\limits_0^1 f_1(x)\,dx=1+O(\alpha-1)$.

Подставляя в лемму, получим:

$$\frac{1}{P}\Bigg(\sum_{\lambda_n\leqslant P}a_n+\sum_{P\leqslant\lambda_n\leqslant\alpha P}a_n e^{-\lambda_n/P}\frac{e}{e^{-1}-e^{-\alpha}}\left(e^{-\lambda_n/P}-e^{-\alpha}\right)\Bigg)=$$
$$=1+O(\alpha-1)+O\left(\frac{1}{P^{1/2}}\right)+O\left(\frac{1}{\ln P(\alpha-1)}\right).$$

Легко видеть, что второе слагаемое неотрицательно:

$$\frac{1}{P}\sum_{\lambda_n\leqslant P}a_n\leqslant 1+O(\alpha-1)+O\left(\frac{1}{P^{1/2}}\right)+O\left(\frac{1}{\ln P(\alpha-1)}\right).$$

Берем $\alpha-1=1/\sqrt{\ln P}$. Когда $P\to\infty$, $\alpha\to 1$,

$$\frac{1}{P}\sum_{\lambda_n\leqslant P}a_n\leqslant 1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln P}}\right).$$

Возьмем функцию $f_2(x)$, $\alpha<1$, $\alpha\to 1$:

$$f_2(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant e^{-1}; \\ \dfrac{e^{\alpha}}{e^{-\alpha}-e^{-1}}(x-e^{-1}) & \text{при } e^{-1}\leqslant x\leqslant e^{-\alpha}; \\ \dfrac{1}{x} & \text{при } e^{-\alpha}\leqslant x\leqslant 1; \end{cases}$$

$$M\leqslant e, \quad \omega(\delta)=\frac{e^{\alpha}}{e^{-\alpha}-e^{-1}}\,\delta=O\left(\frac{\delta}{1-\alpha}\right),$$

$$\int_0^1 f_2(x)\,dx=1-\frac{e^{-\alpha}-e^{-1}}{2}\,e^{\alpha}=1+O(1-\alpha);$$

$$\frac{1}{P}\Bigg(\sum_{n\leqslant\alpha P}a_n+\sum_{\alpha P\leqslant n\leqslant P}a_n e^{-\lambda_n/P}\frac{e^{\alpha}}{e^{-\alpha}-e^{-1}}\left(e^{-\lambda_n/P}-e^{-1}\right)\Bigg)=$$
$$=1+O(1-\alpha)+O\left(\frac{1}{(1-\alpha)\ln P}\right)+O\left(\frac{1}{P^{1/2}}\right).$$

Но

$$\frac{1}{P}\sum_{n\leqslant P}a_n\geqslant\frac{1}{P}\Bigg(\sum_{n\leqslant\alpha P}a_n+\sum_{\alpha P\leqslant n\leqslant P}a_n e^{-\lambda_n/P}\frac{e^{\alpha}}{e^{-\alpha}-e^{-1}}\left(e^{-\lambda_n/P}-e^{-1}\right),$$

ибо

$$e^{-\lambda_n/P}\frac{e^{\alpha}}{e^{-\alpha}-e^{-1}}\left(e^{-\lambda_n/P}-e^{-1}\right)-1\leqslant 0.$$

Поэтому, беря $1-\alpha=\frac{1}{\sqrt{\ln P}}$, получим

$$\frac{1}{P}\sum_{n\leqslant P} a_n \geqslant 1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln P}}\right).$$

Сопоставляя обе оценки, получим теорему.

Следствие 1. Если $\sum\limits_{x\to 1-0} a_n x^n=\frac{1}{1-x}+O(1)$ и $a_n\geqslant 0$, то $\sum\limits_{n\leqslant P} a_n = P+O\left(\frac{P}{\sqrt{\ln P}}\right)$.

Пусть $\sum a_n x^n=\frac{1}{1-x}+O(1)$. Обозначим $-\ln x=\sigma$. Когда $x\to 1-0$, $\sigma\to 0+$, $\sum a_n e^{-n\sigma}=\frac{1}{1-e^{-\sigma}}+O(1)=\frac{1}{\sigma}+O(1)$.

Значит, $\sum\limits_{n\leqslant P} a_n=P+O\left(\frac{P}{\sqrt{\ln P}}\right)$.

Следствие 2. Пусть $a_n\geqslant 0$, $\sum\limits_{r\to 1-0} a_n r^n=\frac{1}{1-r}+O(1)$ и $\sum\limits_{r\to 1-0} a_n r^n e^{in\theta_0}=\frac{1}{e^{i\theta_0}-re^{i\theta_0}}+O(1)$. Тогда $\frac{1}{P}\sum\limits_{n\leqslant P} a_n e^{in\theta_0}=e^{-i\theta_0}+O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln P}}\right)$.

Действительно,

$$\sum_{r\to 1-0} a_n r^n(1+\cos n\theta_0)=\frac{1+\cos\theta_0}{1-r}+O(1),$$

$$\sum_{r\to 1} a_n r^n(1+\sin n\theta_0)=\frac{1-\sin\theta_0}{1-r}+O(1),\quad a_n(1+\cos n\theta_0)\geqslant 0$$

и

$$a_n(1+\sin n\theta_0)\geqslant 0.$$

Поэтому $\frac{1}{P}\sum\limits_{n\leqslant P} a_n(1+\cos n\theta_0)=1+\cos\theta_0+O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln P}}\right)$. Но $\frac{1}{P}\sum a_n=1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln P}}\right)$.

Отсюда

$$\frac{1}{P}\sum a_n\cos n\theta_0=\cos\theta_0+O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln P}}\right).$$

Аналогично

$$\frac{1}{P}\sum a_n\sin n\theta_0=-\sin\theta_0+O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln P}}\right).$$

Я выражаю признательность С. Б. Стечкину за ряд существенных указаний.

Поступило
18 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. C. Titchmarsh, The Theory of Functions, 1932. [2] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937, стр. 25 и 26.