Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

М. Г. НЕЙГАУЗ и В. Б. ЛИДСКИЙ

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 15 I 1951)

Рассматривается вопрос об ограниченности решений линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, заданных в канонической форме:

$$\frac{dy_s}{dt}=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_{k+s}},\quad \frac{dy_{k+s}}{dt}=-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_s}\quad (s=1,2,\ldots,k), \tag{1}$$

где $\mathrm{H}=\sum\limits_{i,\,j=1}^{2k} h_{ij}(t)\,y_i y_j$, $h_{ij}(t)=h_{ji}(t)$ — вещественные кусочно-непрерывные функции с общим периодом ω.

В матрично-векторной форме система (1) имеет вид:

$$y'=IH(t)\,y, \tag{1'}$$

где $I=\begin{pmatrix}0 & E_k\\ -E_k & 0\end{pmatrix}$ (E_k — единичная матрица порядка k), $H(t)$ — симметрическая матрица квадратичной формы Н, $y(t)$ — $2k$-мерный вектор с компонентами $(y_1(t),\ y_2(t),\ldots,\ y_k(t),\ldots,\ y_{2k}(t))$.

Заметим, что важная для приложений система k уравнений

$$y''+P(t)\,y=0, \tag{2}$$

где $P(t+\omega)=P(t)$ — симметрическая матрица порядка k, $y(t)$ — k-мерный вектор, является частным случаем системы (1).

В работе указывается метод отыскания достаточных критериев ограниченности решений систем (1) и (2), сводящий этот вопрос к изучению системы двух уравнений вида (1) и одного уравнения вида (2). В качестве приложения дается ряд критериев.

В основу настоящей работы положены результаты М. Г. Крейна [3]. Отметим также важную работу В. А. Якубовича [4], в которой изучается система двух уравнений вида (1).

В пунктах 1 и 2 мы приводим определения и известные результаты, необходимые для дальнейшего.

1. Пусть $Y(t)$ — фундаментальная система решений системы (1) такая, что $Y(0)=E$, где E — единичная матрица. Ввиду того, что $H(t)$ периодична, $Y(t+\omega)=Y(t)\,U$, где U — постоянная матрица. Характеристические корни ρ_i $(i=1,2,\ldots,2k)$ матрицы монодромии U называются мультипликаторами системы (1).

Так как, по известной теореме А. М. Ляпунова [1], характеристическое уравнение $\det(U-\rho E)=0$ возвратно, все решения системы (1) для $0\leqslant t<\infty$ ограничены в том и только в том случае, если все мультипликаторы по модулю равны единице и у матрицы монодромии все элементарные делители линейны. Заметим, что при этом все решения системы (1) ограничены также для $-\infty < t < 0$.

2. В этом пункте мы изложим результаты М. Г. Крейна ([3]) в той форме, в которой они будут использованы ниже. Запишем систему (1) в виде:

$$y' = IH_0(t)\,y + \lambda IH(t)\,y. \tag{3}$$

Пусть при $\lambda = 0$ все решения системы (3) ограничены и пусть $H(t)$ — матрица с положительным средним по периоду ω, т. е.

$$\int_0^\omega (H(t)\,y(t), y(t))\,dt > 0$$

при любом непрерывно зависящем от t векторе $y(t) \not\equiv 0$.

Если теперь в системе (3) непрерывно увеличивать параметр λ от 0, то k мультипликаторов системы (3) начинают монотонно вращаться по единичной окружности комплексной плоскости против часовой стрелки ($i\rho^{-1}(\lambda)\,\rho'_\lambda < 0$ — мультипликаторы первого рода) и k мультипликаторов — по часовой стрелке ($i\rho^{-1}(\lambda)\,\rho'_\lambda > 0$ — мультипликаторы второго рода), причем принадлежность мультипликатора к определенному роду не зависит от выбора $H(t)$. Появление при этом у матрицы монодромии системы (3) при $\lambda = \lambda_1$ элементарного делителя степени выше первой или мультипликатора с модулем, отличным от единицы, возможно лишь в том случае, если при некотором $\lambda = \lambda_0$ $(0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1)$ на единичной окружности имела место встреча мультипликаторов разного рода. Таким образом, до встречи с мультипликатором другого рода каждый мультипликатор монотонно вращается, не меняя своего рода.

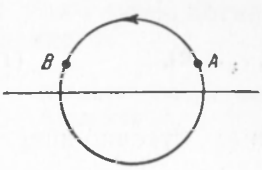

Рис. 1

Если $H(t)$ — матрица с неотрицательным средним и при $\lambda = 0$ у системы (3) нет равных мультипликаторов разного рода, то описанные выше факты имеют место с тем лишь отличием, что для мультипликаторов первого рода $i\rho^{-1}(\lambda)\,\rho'_\lambda \leqslant 0$, а для второго рода $i\rho^{-1}(\lambda)\,\rho'_\lambda \geqslant 0$, т. е. с увеличением λ мультипликатор может оставаться на месте.

3. Пусть в системе (3) $H_0(t) = h_0(t)\,E$, где $h_0(t)$ — функция с периодом ω. Пусть $\rho_s(\lambda)$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ — мультипликаторы первого рода системы (3). При $\lambda = 0$ все они находятся на единичной окружности в некоторой точке A, пусть $\operatorname{Im} \rho_s(0) \neq 0$ (см. рис. 1). Рассмотрим на той же полуокружности точку B, лежащую в направлении обхода против часовой стрелки от A.

Условимся говорить, что периодическая матрица $H(t)$ с неотрицательным средним по периоду ω п е р е в о д и т мультипликатор в точку B если для всех $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ все мультипликаторы первого рода системы (3) располагаются на дуге $\widehat{AB}$, а при $\lambda = 1$ хотя бы один из них находится в точке B.

Т е о р е м а 1. *Пусть $h_1(t) \geqslant 0$ и пусть матрица $h_1(t)\,E$ переводит мультипликатор в точку B. Тогда, какова бы ни была матрица $H(t)$ с неотрицательным средним по периоду и такая, что $\|H(t)\| \leqslant h_1(t)$ *, все мультипликаторы первого рода системы*

$$y' = h_0(t)\,Iy + IH(t)\,y \tag{4}$$

находятся на дуге $\widehat{AB}$.

---

* За норму симметрической матрицы $\|H(t)\|$ при фиксированном t мы принимаем $\max\limits_i |\lambda_i(t)|$, где $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, 2k$, — собственные значения матрицы $H(t)$ при данном t.

Наметим доказательство теоремы. Пусть $(0, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{r-1}, \omega)$ — фиксированное разбиение интервала $(0, \omega)$. Предположим сперва, что все коэффициенты системы (4) принимают на каждом из интервалов (t_{i-1}, t_i) постоянные значения. Матрицы с такими элементами мы будем для краткости называть ступенчатыми.

Пусть Γ — множество ступенчатых матриц, переводящих мультипликатор в точку B, не превосходящих по норме $h_1(t)$. Множество Γ компактно в смысле равномерной сходимости, так как разбиение на интервалы (t_{i-1}, t_i) фиксировано. Поэтому можно найти матрицу $H_{\min}(t) \in \Gamma$ с нормой $h_{\min}(t) \leqslant h_1(t)$ такую, что любая ступенчатая $\widetilde{H}(t)$ с неотрицательным средним и нормой $\widetilde{h}(t) \leqslant h_{\min}(t)$ $(\widetilde{h}(t) \not\equiv h_{\min}(t))$ уже не принадлежит Γ, т. е. не переводит мультипликатор в B.

Используя этот факт и свойство мультипликаторов первого рода (см. п. 2), можно показать, что если $H(t)$ ступенчатая с неотрицательным средним и $\| H(t) \| \leqslant h_{\min}(t)$, то все мультипликаторы первого рода системы (4) находятся на дуге $\widehat{AB}$.

Докажем теперь, что $h_{\min}(t) = h_1(t)$. Рассмотрим матрицу $H_\mu(t) = H_{\min}(t) + \mu (h_{\min}(t) E - H_{\min}(t))$. $H_\mu(t) \in \Gamma$ при всех $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Это очевидно при $\mu = 0$. Так как матрица $h_{\min}(t) E - H_{\min}(t)$ имеет неотрицательное среднее, мультипликатор первого рода с увеличением μ может сдвинуться из точки B лишь против часовой стрелки. Это противоречит, однако, предшествующему замечанию, ибо $\| H_\mu(t) \| = h_{\min}(t)$. Так как $H_{\mu=1}(t) = h_{\min}(t) E$, то $h_{\min}(t) E \in \Gamma$. Сравнивая аргументы мультипликаторов первого рода системы (4) при $H(t) = h_1(t) E$ и $H(t) = h_{\min}(t) E$, получаем $h_1(t) = h_{\min}(t)$, ибо, по предположению, $h_1(t) \geqslant h_{\min}(t)$.

Любую кусочно-непрерывную функцию можно приблизить с любой степенью точности ступенчатой. Отсюда, ввиду непрерывной зависимости мультипликаторов от коэффициентов системы, следует, что теорема верна в общем случае.

Определение. Систему (1) назовем сильно устойчивой, если существует такое $\varepsilon > 0$, что, какова бы ни была симметрическая с периодом ω матрица Q, элементы которой кусочно-непрерывны и $\| Q(t) \| < \varepsilon$, все решения системы $y' = I(H + Q) y$ ограничены.

Исследуя вариацию матрицы монодромии, можно показать, что система (1), все решения которой ограничены, сильно устойчива тогда и только тогда, когда у системы отсутствуют равные мультипликаторы разного рода.

Аналогично теореме 1 доказывается теорема 2.

Теорема 2. *Система $y' = IH_0(t) y + IH(t) y$, где $H(t)$ с неотрицательным средним, сильно устойчива, если сильно устойчива система $y' = IH_0(t) y + q(t) Ey$ для любой периодической функции $q(t)$, такой, что $0 \leqslant q(t) \leqslant \| H(t) \|$.*

Для системы (2) справедливы полные аналоги теорем 1 и 2. Сформулируем одну из них.

Теорема 2'. *Система $y'' + P_0(t) y + P(t) y = 0$, где $P(t)$ с неотрицательным средним, сильно устойчива, если сильно устойчива система $y'' + P_0(t) y + r(t) Ey = 0$ для любой периодической функции $r(t)$ такой, что $0 \leqslant r(t) \leqslant \| P(t) \|$.*

Приведем несколько достаточных критериев сильной устойчивости систем (1) и (2).

Критерий 1. Пусть $\lambda_{\min}(t)$ и $\lambda_{\max}(t)$ — наименьшее и наибольшее собственные значения $H(t)$ в каждой точке. Система (1) сильно устойчива, если

$$n\pi < \int_0^\omega \lambda_{\min}(t)\,dt \leqslant \int_0^\omega \lambda_{\max}(t)\,dt < (n+1)\pi,$$

где $n \gtrless 0$ — целое число.

Для случая $k=1$ этот критерий был ранее установлен В. А. Якубовичем.

Используя критерий, полученный для одного уравнения (2) вариационным методом, и теорему 2′, можно доказать следующий критерий.

Критерий 2. Обозначим $p_{\min}(t)$ и $p_{\max}(t)$ — наименьшее и наибольшее собственные значения $P(t)$ в каждой точке. Пусть

$$a^2 \underset{\neq}{\leqslant} p_{\min}(t) \leqslant p_{\max}(t) \underset{\neq}{\leqslant} b^2, \tag{5}$$

где a, b — константы и $n^2\pi^2/\omega^2 \leqslant a^2 < (n+1)^2\pi^2/\omega^2$.

Система (2) сильно устойчива, если

$$\int_0^\omega (p_{\max}(t) - a^2)\,dt < 2(n+1)(b^2 - a^2)\nu_0,$$

где ν_0 — наименьший положительный корень уравнения

$$a \operatorname{ctg}\left[a\left(\frac{\omega}{2(n+1)} - \nu\right)\right] = b \operatorname{tg}(b\nu).$$

Придавая константам a, b различные значения, можно вывести обобщения на системы (2) критериев Н. Е. Жуковского и А. М. Ляпунова.

Критерий 2′. Пусть $a^2 = n^2\pi^2/\omega^2$, $b^2 = (n+1)^2\pi^2/\omega^2$. Система (2) сильно устойчива, какова бы ни была матрица $P(t)$, удовлетворяющая условию (5).

Этот критерий для одного уравнения (2) был впервые получен Н. Е. Жуковским ([2]).

Критерий 2″. Пусть $b^2 = +\infty$ и $P(t)$ удовлетворяет условию (5). Система (2) сильно устойчива, если

$$\int_0^\omega (p_{\max}(t) - a^2)\,dt < 2a(n+1)\operatorname{ctg}\frac{a\omega}{2(n+1)}.$$

При $a=0$ получаем обобщение критерия А. М. Ляпунова, установленное для системы (2) М. Г. Крейном ([3]), а именно:

Система (2) сильно устойчива, если

$$\int_0^\omega p_{\max}(t)\,dt < \frac{4}{\omega}.$$

Критерий 3. Рассмотрим систему $y'' + P_0(t)y + P(t)y = 0$, где $P_0(t)$ — диагональная матрица такая, что ее элементы $p_{ii}^0(t)$ расположены в областях устойчивости одного уравнения (2) одной четности, а $P(t)$ — матрица с неотрицательным средним и $\|P(t)\| = p(t)$. Если $p_{ii}^0(t) + p(t)$ принадлежит той же области устойчивости, что и $p_{ii}^0(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то система сильно устойчива.

Авторы пользуются случаем принести глубокую благодарность своему научному руководителю проф. И. М. Гельфанду за руководство и помощь, оказанную в работе.

Поступило
13 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, изд. АН СССР, 1948. [2] Н. Е. Жуковский, Полн. собр. соч., 1, 1937, стр. 315. [3] М. Г. Крейн, ДАН, 73, № 3 (1950). [4] В. А. Якубович, Усп. матем. наук, 6, в. 1 (1951).