Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОПЕРАТОРА $\mathbf{f}u(x) = f[x, u(x)]$

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 I 1951)

1. Пусть G — измеримое множество. Пусть $f(x, u)$ — функция двух переменных $x \in G$, $-\infty < u < \infty$, непрерывная по u почти при всех $x \in G$ и измеримая по x. Обозначим через $\mathbf{f}$ оператор, заданный на совокупности вещественных функций на G равенством

$$\mathbf{f}u(x) = f[x, u(x)] \quad (x \in G).$$

Важную роль в теории нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна играют признаки непрерывности оператора $\mathbf{f}$ для случаев, когда он действует из пространства L^{p_1} функций, суммируемых со степенью p_1, в пространство L^{p_2}.

Различного рода признаки непрерывности оператора $\mathbf{f}$ при дополнительном предположении конечности меры G были установлены В. В. Немыцким (1), М. М. Вайнбергом (2, 3) и автором (4). В частности, в (4) показано, что оператор $\mathbf{f}$ обладает рядом свойств линейного оператора: из непрерывности в одной точке следует непрерывность во всех точках и равномерная ограниченность норм значений оператора $\mathbf{f}$ на любом шаре пространства L^{p_1}.

В настоящей заметке мы доказываем теорему, дающую полный ответ на вопрос о непрерывности оператора $\mathbf{f}$ (без предположения, что $\operatorname{mes} G < \infty$).

2. Теорема 1. *Если оператор $\mathbf{f}$ преобразует каждую функцию из L^{p_1} в функцию из L^{p_2}, то он непрерывен.*

Пусть вначале $\operatorname{mes} G < \infty$. Допустим, что оператор $\mathbf{f}$ не непрерывен. Без ограничения общности можно считать при этом, что он разрывен в точке θ — нуле пространства L^{p_1} и что $\mathbf{f}(x, 0) \equiv 0$ $(x \in G)$. Тогда существует такая сильно сходящаяся к θ последовательность $\varphi_n(x) \in L^{p_1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что

$$\int_G \left| \mathbf{f}\varphi_n(x) \right|^{p_2} dx > \alpha \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где α — некоторое положительное число. Будем считать при этом, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_G \left| \varphi_n(x) \right|^{p_1} dx < \infty. \tag{2}$$

Построим такие последовательности чисел ε_k, функций $\varphi_{n_k}(x)$ и множеств $F_k \subset G$, что: а) $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k / 2$; б) $\operatorname{mes} F_k \leqslant \varepsilon_k$; в) $\int\limits_{F_k} \left| \mathbf{f} \varphi_{n_k}(x) \right|^{p_2} dx > 2\alpha / 3$; г) из $\operatorname{mes} E < 2\varepsilon_{k+1}$ для любого множества $E \subset G$ следует $\int\limits_{E} \left| \mathbf{f} \varphi_{n_k}(x) \right|^{p_2} dx < \alpha / 3$.

Пусть $\varepsilon_1 = \operatorname{mes} G$, $\varphi_{n_1}(x) = \varphi_1(x)$, $F_1 = G$. Если ε_k, $\varphi_{n_k}(x)$, F_k построены, то в качестве ε_{k+1} выберем такое число, что выполнено условие г), при этом автоматически будет выполнено условие а). Для того чтобы выбрать функцию $\varphi_{n_{k+1}}(x)$ и множество F_{k+1}, удовлетворяющие условиям б) и в), нужно воспользоваться леммой В. В. Немыцкого [1], в силу которой последовательность $\mathbf{f} \varphi_n(x)$ сходится по мере к нулю.

Определим функцию $\psi(x)$ равенством

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_{n_k}(x) & \text{при } x \in T_k \quad (k = 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{при } x \overline{\in} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} T_i, \end{cases} \tag{3}$$

где $T_k = F_k \setminus \bigcup\limits_{i=k+1}^{\infty} F_i$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Так как $\operatorname{mes} \bigcup\limits_{i=k+1}^{\infty} \leqslant \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} \varepsilon_i < 2\varepsilon_{k+1}$,

то, в силу условий в) и г):

$$\int\limits_{T_k} \left| \mathbf{f} \psi(x) \right|^{p_2} dx \geqslant \int\limits_{F_k} \left| \mathbf{f} \varphi_{n_k}(x) \right|^{p_2} dx - \int\limits_{\bigcup\limits_{i=k+1}^{\infty} F_i} \left| \mathbf{f} \varphi_{n_k}(x) \right|^{p_2} dx > \frac{\alpha}{3}. \tag{4}$$

В силу (2) $\psi(x) \in L^{p_1}$ и, по условию теоремы, $\mathbf{f} \Psi(x) \in L^{p_2}$. С другой стороны, в силу (4) $\mathbf{f} \psi(x) \overline{\in} L^{p_2}$, так как $T_i \cap T_j = 0$ при $i \neq j$, и, следовательно,

$$\int\limits_{G} \left| \mathbf{f} \psi(x) \right|^{p_2} dx \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left| \mathbf{f} \psi(x) \right|^{p_2} dx = \infty.$$

Значит, в предположении $\operatorname{mes} G < \infty$ теорема доказана.

Пусть теперь $\operatorname{mes} G = \infty$. Допустим снова, что оператор $\mathbf{f}$ не непрерывен. Без ограничения общности можно считать, что он разрывен в точке θ. При этом снова будем предполагать, что $f(x, 0) \equiv 0$ $(x \in G)$. Пусть $\varphi_n(x) \in L^{p_1}$ такая последовательность, для которой выполнены условия (1) и (2). Построим такие последовательности функций $\varphi_{n_k}(x)$ и множеств T_k, что $\operatorname{mes} T_k < \infty$, $T_i \cap T_j = 0$ при $i \neq j$, причем

$$\int\limits_{T_k} \left| \mathbf{f} \varphi_{n_k}(x) \right|^{p_2} dx > \frac{\alpha}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Пусть $\varphi_{n_1}(x) = \varphi_1(x)$. Множество T_1 можно построить в силу (1). Если $\varphi_{n_k}(x)$, T_k построены, то, в силу доказанной непрерывности оператора $\mathbf{f}$ для случая $\operatorname{mes} G < \infty$, можно указать такое n_{k+1}, что

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{l=1}^{k} T_l} \left| \mathbf{f} \varphi_{n_{k+1}}(x) \right|^{p_2} dx < \frac{\alpha}{2}, \tag{6}$$

при этом в силу (1) можно указать такое множество E_{k+1} конечной меры, что

$$\int_{E_{k+1}} \left| \mathfrak{f}\, \varphi_{n_{k+1}}(x) \right|^{p_2} dx > \alpha. \tag{7}$$

Пусть $T_{k+1} = E_{k+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} T_i$, при этом условие (5) будет выполнено в силу (6) и (7).

Определим функцию $\psi(x)$ равенством (3). В силу (2) $\psi(x) \in L^{p_1}$ и, по условию теоремы, $\mathfrak{f}\psi(x) \in L^{p_2}$. С другой стороны, в силу (5), $\mathfrak{f}\psi(x) \,\overline{\in}\, L^{p_2}$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

В заметке ([3]) М. М. Вайнберг устанавливает теорему о том, что *оператор* $\mathfrak{f}$ *непрерывен, если он компактен.*

Можно показать, что *оператор* $\mathfrak{f}$ *компактен только тогда, когда функция* $f(x, u)$ *не зависит от* u. Таким образом, приведенная теорема М. М. Вайнберга относится лишь к операторам $\mathfrak{f}$, преобразующим пространство L^{p_1} в одну точку пространства L^{p_2}.

3. Теорема 2. *Если оператор* $\mathfrak{f}$ *преобразует каждую функцию из* L^{p_1} *в функцию из* L^{p_2}, *то нормы его значений на каждом шаре пространства* L^{p_1} *равномерно ограничены.*

Без ограничения общности можно считать, что $f(x, 0) \equiv 0$ $(x \in G)$.

Допустим, что доказываемое утверждение неверно. Тогда существует такая последовательность функций $\varphi_n(x) \in L^{p_1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ с равномерно ограниченными нормами

$$\int_G \left| \varphi_n(x) \right|^{p_1} dx < A \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

что

$$\int_G \left| \mathfrak{f}\, \varphi_n(x) \right|^{p_2} dx > n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Построим новую последовательность функций $\psi_n(x) \in L^{p_1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ следующим образом. Для построения функций $\psi_n(x)$ разобьем G так на n множеств $G_1, \ldots, G_n$, что

$$\int_{G_i} \left| \varphi_n(x) \right|^{p_1} dx < \frac{A}{n} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

В силу (8) по крайней мере при одном значении $i = i_0$

$$\int_{G_{i_0}} \left| \mathfrak{f}\, \varphi_n(x) \right|^{p_2} dx > 1. \tag{10}$$

Пусть

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) & x \in G_{i_0}, \\ 0 & x \,\overline{\in}\, G_{i_0}. \end{cases}$$

В силу (9) последовательность $\psi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сильно сходится в L^{p_1} к нулю. В силу (10) последовательность $\mathfrak{f}\psi_n(x)$ не сходится к нулю, так как

$$\int_G \left| \mathfrak{f}\, \psi_n(x) \right|^{p_2} dx = \int_{G_{i_0}} \left| \mathfrak{f}\, \varphi_n(x) \right|^{p_2} dx > 1.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{f}$ не непрерывен.

Полученное противоречие с теоремой 1 доказывает теорему 2.

4. В приложениях удобны достаточные признаки непрерывности оператора $\mathbf{f}$, вытекающие из теоремы 1. Например, оператор $\mathbf{f}$ действует из L^{p_1} в L^{p_2}, непрерывен и ограничен, если

$$\left| f(x, u) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} S_i(x) \left| u \right|^{\beta_i} \qquad (x \in G; \ -\infty < u < \infty),$$

где

$$S_i(x) \in L^{\frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2 \beta_i}}, \quad 0 \leqslant p_2 \beta_i < p_1 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

5. Полученные результаты позволяют установить общие признаки полной непрерывности нелинейных интегральных операторов Гаммерштейна. Эти признаки, в свою очередь, позволяют получить ряд теорем существования решений, теорем о собственных функциях для случаев, когда интегралы в рассматриваемых интегральных уравнениях распространены и на множества бесконечной меры.

В заключение отметим, что все рассуждения полностью проходят и для случая, когда рассматриваются операторы в пространстве вектор-функций.

Институт математики
Академии наук СССР

Поступило
18 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Немыцкий, Матем. сборн., **41** : 3 (1934). [2] М. М. Вайнберг, Усп. матем. наук, в. 28 (1949). [3] М. М. Вайнберг, ДАН, **73**, № 2 (1950). [4] М. А. Красносельский, Украинск. матем. журн., **2**, № 3 (1950); ДАН, **73**, № 1 (1950).