Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

Академик М. В. КЕЛДЫШ

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ВЫРОЖДЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

В ряде работ рассматривались уравнения эллиптического типа вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial y} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu = 0, \quad c \leqslant 0, \tag{1}$$

в области, расположенной в полуплоскости $y > 0$, граница которой содержит отрезок оси x. При общих ограничениях на гладкость границы области устанавливается существование решения задачи Дирихле для уравнения (1).

Рассмотрим уравнение

$$L(u) = y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial y} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu = 0, \quad c \leqslant 0 \tag{2}$$

в области Δ, ограниченной отрезком (0,1) оси x и гладкой кривой Γ, опирающейся на отрезок (0, 1) и расположенной в полуплоскости $y > 0$. Мы предположим, что a, b, c являются аналитическими функциями x, y.

Задачей D мы будем называть задачу Дирихле для уравнения (2) при непрерывных данных на границе. Задачей E назовем задачу определения ограниченного в области Δ решения уравнения (2) при непрерывных данных на Γ.

Теорема. *Если $m < 1$, то всегда существует решение задачи D, а задача E неопределенна.*

Если $m = 1$ и $a(x, 0) < 1$, то всегда существует решение задачи D, а задача E неопределенна; если же $m = 1$ и $a(x, 0) \geqslant 1$, то задача D, вообще говоря, не имеет решения, а задача E всегда имеет единственное решение.

Если $1 < m < 2$ и $a(x, 0) \leqslant 0$, то всегда существует решение задачи D, а задача E неопределенна; если же $1 < m < 2$ и $a(x, 0) > 0$, то задача D, вообще говоря, не имеет решения, а задача E всегда имеет единственное решение.

Если $m \geqslant 2$ и $a(x, 0) < 0$, то задача D всегда имеет решение, а задача E неопределенна; если же $m \geqslant 2$ и $a(x, 0) \geqslant 0$, то задача D не всегда имеет решение, а задача E всегда имеет единственное решение.

Для доказательства заметим, что функция v, удовлетворяющая неравенству $L(v) < 0$, не может иметь внутри Δ отрицательного минимума.

Установим теперь две леммы.

Лемма 1. *Если существует функция W, положительная в $\Delta + \Gamma$, стремящаяся равномерно к бесконечности при приближении* *к отрезку* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *и удовлетворяющая неравенству* $L(W) < 0$ *в* Δ, *то решение задачи* E *единственно.*

В самом деле, пусть u — решение (2), равное нулю на Γ. В силу $L(\varepsilon W - u) < 0$ функция $\varepsilon W - u$ не может иметь в Δ отрицательного минимума, и так как ее предельные значения на границе положительны, всюду в Δ имеем $\varepsilon W - u \geqslant 0$. Отсюда $u \leqslant 0$ и, так как аналогично получим $u \geqslant 0$, имеем $u = 0$.

Лемма 2. *При любых данных на* Γ *существует решение задачи* E. *Если для каждой точки* x_0 *отрезка* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *можно построить функцию* v, *непрерывную в некоторой окрестности* σ_{x_0} $(y \geqslant 0, (x-x_0)^2 + y^2 \leqslant \rho^2)$, *равную нулю в* x_0, *положительную в остальных точках* σ_{x_0} *и удовлетворяющую во внутренних точках* σ_{x_0} *неравенству* $L(v) < 0$, *то при любых данных на границе существует решение задачи* D.

Функцию v мы будем называть барьером в точке x_0. Пусть f — произвольная непрерывная функция в $\bar{\Delta}$. Обозначим через Δ_η часть Δ, расположенную в полуплоскости $y > \eta$. Пусть u_η — решение задачи Дирихле для уравнения (2) в Δ_η, принимающее значения f на границе Δ_η. Решение u_η в Δ_η существует, так как уравнение (2) не вырождается в $\bar{\Delta}_\eta$. В силу $c \leqslant 0$ имеем в Δ_η неравенство $|u_\eta| \leqslant \max |f|$, поэтому семейство функций $\{u_\eta\}$ компактно внутри Δ. Пусть u — предел равномерно сходящейся подпоследовательности семейства $\{u_\eta\}$. Очевидно, $L(u) = 0$ и, так как все точки Γ регулярны, функция u принимает значения f на Γ. Таким образом, решение задачи E всегда существует. Если в каждой точке $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$ существует барьер v, то обычными рассуждениями доказывается, что u принимает значения f на $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$, следовательно, существует решение задачи D.

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно построить барьеры в точках отрезка $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ для всех случаев, когда утверждается существование решения задачи D, и функцию W для всех случаев, когда утверждается единственность решения задачи E.

Во всех случаях выражение для барьера мы будем брать в виде

$$v = y^\beta + (x - x_0)^2, \quad 0 < \beta < 1;$$

тогда

$$L(v) = \beta(\beta - 1) y^{m+\beta-2} + a\beta y^{\beta-1} + 2 + 2b(x - x_0) + cv.$$

Если $m < 1$, то при достаточно малых y, $|x - x_0|$

$$L(v) < \frac{1}{2}\beta(\beta - 1) y^{m+\beta-2} < 0.$$

При $m = 1$, $a(x, 0) < 1$ выберем β так, чтобы $\beta < 1 - a(x_0, 0)$, тогда

$$L(v) < \frac{1}{2}\beta(\beta - 1 + a(x_0, 0)) y^{\beta-1} < 0$$

при достаточно малых $|x - x_0|$ и y.

В случае $1 < m < 2$ и $a(x, 0) \leqslant 0$ выбираем $\beta < 2 - m$,

$$L(v) \leqslant \beta(\beta - 1) y^{m-2+\beta} + 2 + 2b(x - x_0) + cv < \frac{1}{2}\beta(\beta - 1) y^{m-2+\beta} < 0$$

вблизи $(x_0, 0)$.

Наконец, при $m \geqslant 2$, $a(x, 0) < 0$ и малых y, $|x - x_0|$

$$L(v) \leqslant \beta a y^{\beta-1} + 2 + 2b(x - x_0) + cv < \frac{\beta}{2} a(x_0, 0) y^{\beta-1} < 0.$$

Перейдем к установлению единственности проблемы Е. Покажем, что во всех требуемых случаях можно выбрать функцию, удовлетворяющую условиям леммы 1, в виде

$$W = -\log y - (x - \alpha)^n + C,$$

где α выбрано так, чтобы расстояние от области Δ до прямой $x = \alpha$ было больше единицы.

Пусть, например, $m = 1$, $a(x, 0) \geqslant 1$,

$$L(W) = \frac{1 - a}{y} - n(n-1)(x-\alpha)^{n-2} - nb(x-\alpha)^{n-1} + cW.$$

В области Δ при достаточно большом A имеем, в силу аналитичности $a(x, y)$,

$$1 - a < Ay.$$

Показатель n можно выбрать столь большим, чтобы

$$n - 1 > 3\,|b(x-\alpha)|, \quad n(n-1) > 3A;$$

после этого подберем C столь большим, чтобы $W > 0$ в $\bar{\Delta}$. С другой стороны, будем иметь

$$L(W) < -\frac{n(n-1)}{3} + cW < 0.$$

Аналогичным образом разбираются случаи $1 < m < 2$, $a(x, 0) > 0$ и $m \geqslant 2$, $a(x, 0) \geqslant 0$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
19 XII 1950