Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

И. А. ВИЛЬНЕР

ПРОБЛЕМА АНАМОРФОЗЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 I 1951)

§ 1. В настоящей работе мы используем обозначения статьи ([2]). Теорему § 4 работы ([2]) в дальнейшем будем называть основной теоремой теории номографирования систем уравнений, или, короче,— основной теоремой теории систем.

Величины τ, φ_1, ψ_1, φ_2, ψ_2, u, v, Δ_1, Δ_2 определены в ([2]). Пусть

$$C = \frac{v_y u_{xx} - u_y v_{xx} + 2(v_x u_{xy} - u_x v_{xy})}{u_x v_y - u_y v_x},$$

$$D = \frac{u_x v_{yy} - v_x u_{yy} + 2(u_y v_{xy} - v_y u_{xy})}{u_x v_y - u_y v_x},$$

$$\overline{u} = \varphi_1'(\psi_1 - \psi_2) - \psi_1'(\varphi_1 - \varphi_2), \qquad \overline{v} = \varphi_2'(\psi_1 - \psi_2) - \psi_2'(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\xi_3 = \xi_3(z_1; z_2), \qquad \eta_3 = \eta_3(z_1; z_2),$$

$$T = T(\tau) = \frac{\tau_x - \tau\tau_y}{\tau}, \qquad T_i = T(\tau_i) = \frac{\tau_{ix} - \tau_i \tau_{iy}}{\tau_i} \quad (i = 1, 2),$$

где через C и D мы обозначили проективно-дифференциальные инварианты, введенные Гурса — Пенлеве.

В основе работы ([2]) лежат следующие леммы, которые мы приводим только потому, что в упомянутой работе они за недостатком места явно не формулированы.

Лемма 1 ([2]). *Номограмма системы уравнений*

$$f_1(x; y; z_1) = 0, \quad f_2(x; y; z_2) = 0 \tag{1,1}$$

с одноименными бинарными полями $(z_1; z_2)$ определяется с шестью произвольными функциями следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} &x_1 = \varphi_1, \quad y_1 = \psi_1, \qquad x_2 = \varphi_2, \qquad y_2 = \psi_2, \\ &\overline{x}_{(1)} = \xi_3, \quad \overline{y}_1 = \xi_3 u + v, \quad \overline{x}_{(2)} = \eta_3, \quad \overline{y}_{(2)} = \eta_3 u + v. \end{aligned} \tag{1,2}$$

Лемма 2 ([2]). *Номограмма системы уравнений* (1,1) *с двумя инвариантными бинарными полями $(z_1; z_2)$ определяется уравнениями:*

$$\begin{aligned} x_1 = \varphi_1 = -\frac{v_y}{u_y}, \quad y_1 = \psi_1 = -u\frac{v_y}{u_y} + v, \\ x_2 = \varphi_2 = -\frac{v_x}{u_x}, \quad y_2 = \psi_2 = -u\frac{v_x}{u_x} + v, \end{aligned} \tag{1,3}$$

$$\overline{x}_{(1)} = -\frac{v_{z_2}}{u_{z_2}}, \quad \overline{y}_{(1)} = -u\frac{v_{z_2}}{u_{z_2}} + v, \qquad \overline{x}_{(2)} = -\frac{v_{z_1}}{u_{z_1}}, \quad \overline{y}_{(2)} = -u\frac{v_{z_1}}{u_{z_1}} + v$$

*с четырьмя произвольными функциями**.

Лемма 3 ([2]). *Для того чтобы система* (1,1) *была номографируемой, иначе говоря, для того чтобы два одноименных бинарных поля леммы* 2 (z_1; z_2) *можно было бы заменить, соответственно, шкалами* z_1 *и* z_2, *необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись, соответственно, уравнения:*

$$\left(\frac{v_{z_2}}{u_{z_2}}\right)_{z_2}=0, \qquad \left(\frac{v_{z_1}}{u_{z_1}}\right)_{z_1}=0, \tag{1,4}$$

причем оба условия выражают взаимно-независимые свойства.

Из леммы 3 легко получаем, что справедлива лемма 4.

Лемма 4. *Для того чтобы система* (1,1) *была номографируемой, необходимо и достаточно, чтобы* φ_i *и* ψ_i ($i=1, 2$) *удовлетворяли уравнениям:*

$$T_1+\left(\ln\frac{\overline{v}^2}{\overline{u}}\right)_x+\tau_1\left(\ln\frac{\overline{u}^2}{\overline{v}}\right)=0, \quad T_2+\left(\ln\frac{\overline{v}^2}{\overline{u}}\right)_x+\tau_2\left(\ln\frac{\overline{u}^2}{\overline{v}}\right)_y=0, \tag{1,5}$$

причем первое уравнение дает условие вырождаемости первого инвариантного поля в шкалу z_1, *а второе — второго поля в шкалу* z_2.

Из двух уравнений (1,5) находим:

$$\left(\ln\frac{\overline{u}^2}{\overline{v}}\right)_y=-\frac{T_1-T_2}{\tau_1-\tau_2}=-\Delta_2, \quad \left(\ln\frac{\overline{v}^2}{\overline{u}}\right)_x=-\frac{T_1/\tau_1-T_2/\tau_2}{1/\tau_1-1/\tau_2}=\Delta_1\,{**}. \tag{1,6}$$

Лемма 5. *Выражения* $\left(\ln\frac{\overline{u}^2}{\overline{v}}\right)_y$ *и* $\left(\ln\frac{\overline{v}^2}{\overline{u}}\right)_x$ *являются проективно-дифференциальными инвариантами Гурса — Пенлеве с точностью до знака.*

В самом деле, вычисляя, легко найдем

$$\left(\ln\frac{\overline{v}^2}{\overline{u}}\right)_x=\left[\ln-\frac{(u_x v_y-u_y v_x)^2}{u_x^3}\right]_x=-C,$$
$$\left(\ln\frac{\overline{u}^2}{\overline{v}}\right)_y=\left[\ln\frac{(u_x v_y-u_y v_x)^2}{u_y^3}\right]_y=-D; \tag{1,7}$$

следовательно, имеем:

$$C=-\Delta_1, \quad D=\Delta_2. \tag{1,8}$$

Лемма 6 ([2]). *Имеют место следующие равенства:*

$$-3(\ln\overline{u})_{xy}\equiv-3(\varphi_1'\psi_1''-\varphi_1''\psi_1')\frac{\overline{v}}{\overline{u}^2}=2\Delta_{2x}-\Delta_{1y},$$
$$-3(\ln\overline{v})_{xy}\equiv-3(\varphi_2''\psi_2'-\varphi_2'\psi_2'')\frac{\overline{u}}{\overline{v}^2}=\Delta_{2x}-2\Delta_{1y}, \tag{1,9}$$

$$d\overline{x}_{(1)}-d^2\overline{y}_{(1)}-d^2\overline{x}_{(1)}d\overline{y}_{(1)}\equiv K[\Delta_{1y}+\Delta_{2x}+3(\ln\tau_1)_{xy}],$$
$$d\overline{x}_{(2)}d^2\overline{y}_{(2)}-d^2\overline{x}_{(2)}d\overline{y}_{(2)}\equiv L[\Delta_{1y}+\Delta_{2x}+3(\ln\tau_2)_{xy}], \tag{1,10}$$

где K *и* L *— не обращающиеся в нуль множители.*

§ 2. Из упомянутой основной теоремы теории систем уравнений непосредственно вытекает следующая теорема.

---

* Эта номограмма принадлежит к типу тангенциальных ([2]).

** Из (1,6) и (1,5) получаем $T_1+\Delta_1-\tau_1\Delta_2=0$, $T_2+\Delta_1-\tau_2\Delta_2=0$, где Δ_1 и Δ_2 — параметры автора.

ПОПРАВКА

На странице 178 1-ю строку формулы (1,10) следует читать:

$$d\bar{x}_{(1)}\, d^2\bar{y}_{(1)} - d^2\bar{x}_{(1)}\, d\bar{y}_{(1)} \equiv K\,[\Delta_{1y} + \Delta_{2x} + 3\,(\ln \tau_1)_{xy}\,],$$

Теорема 1. *Пусть левая часть уравнения*

$$f(x; y; z) = 0 \tag{2,1}$$

подчинена следующим ограничениям: 1) *эта функция имеет в некоторой трехмерной области* G *непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно по всем аргументам;* 2) *частные производные функции* $f(x; y; z)$ *не обращаются в нуль в области* G, *т. е.* $f_x f_y f_z \neq 0$; 3) *уравнения системы* $f(x; y; z_1) = 0$, $f(x; y; z_2) = 0$ *могут быть однозначно разрешены относительно* z_1 *и* z_2 *в окрестности каждой точки некоторого двумерного множества* G_1, *принадлежащего* G; 4) *якобиан*

$$J = \frac{D(z_1; z_2)}{D(x; y)} \neq 0,$$

или, что то же,

$$\tau_2 - \tau_1 \neq 0 \tag{2,2}$$

на соответствующем множестве точек G_1^* *плоскости* xOy.

Следовательно, уравнение (2,1) *определяет многозначную функцию* z *от переменных* x *и* y *в* G_1^*, *причем (что очень существенно) между двумя функциями* $z_1 = z_1(x; y)$ *и* $z_2 = z_2(x; y)$ *не может быть установлено соотношение вида* $\varphi(z_1; z_2) \equiv 0$ *ни в какой области, принадлежащей* G_1^*.

Тогда необходимым и достаточным условием номографируемости уравнения (2,1) *с одним выравниванием на множестве* G_1^* *с заведомо непрямолинейной шкалой* z *(случай распадения шкалы* z *на прямые, среди которых хотя бы две не сливаются, не исключается) является выполнение уравнений* (4,1)* *основной теоремы теории номографирования систем уравнений работы* ([2]), § 4. *Номограмма единственна с точностью коллинеации.*

Ограничения 1) — 3) формулированной теоремы могут быть ослаблены или изменены очевидным образом.

Применение этой теоремы делает целесообразным ее обобщение путем введения понятия номограмм с, вообще говоря, мнимыми шкалами и продолжения функций z_1 и z_2 до естественной границы G_1^*.

§ 3. Условия 1) — 4) формулированной теоремы мы назовем z-условиями, поскольку переменная z находится в привилегированном положении. Если z-условия не удовлетворены, то следует применить эту теорему для x-условий либо y-условий.

Если в z-условиях, x-условиях и y-условиях ограничения 1) — 3) удовлетворены, а ограничение 4) — нет, то уравнение (2,1) либо неномографируемо, либо номографируемо с тремя прямолинейными шкалами z, x и y и, следовательно, применимы условия Сен-Робера.

§ 4. Теорема 2. *В предположении выполнения* z*-условий номограмма уравнения* (2,1) *будет иметь шкалы* x, *либо* y, *либо* x *и* y *прямолинейными, а шкалу* z *— криволинейной или распадающейся***, *если, соответственно, удовлетворяются следующие равенства:*

$$2\Delta_{2x} - \Delta_{1y} = 0; \quad \Delta_{2x} - 2\Delta_{1y} = 0; \quad \Delta_{1y} = 0, \quad \Delta_{2x} = 0.$$

---

* В первом из этих уравнений имеется опечатка. Уравнения (4,1) следует писать так:

$$-\Delta_1 = [\ln(\Delta_{2x} - 2\Delta_{1y})]_x, \quad \Delta_2 = [\ln(2\Delta_{2x} - \Delta_{1y})].$$

** При этом шкалы z_1, либо z_2, либо z_1 и z_2, носители которых, в силу условия 4) теоремы 1, не совпадают, будут прямолинейными, если, соответственно: $\Delta_{1y} + \Delta_{2x} + 3(\ln \tau_1)_{xy} \equiv 0$, либо $\Delta_{1y} + \Delta_{2x} + 3(\ln \tau_2)_{xy} \equiv 0$, либо оба эти равенства одновременно выполняются.

Теорема 3. *В предположении, что z-условия выполняются, будем иметь коническую номограмму со шкалами x и y, находящимися на одном коническом сечении, и с криволинейной или распадающейся шкалой z, если выполнены условия $\Delta_{1y} = -\Delta_{2x} \neq 0$, $\Delta_{1xy} = -\Delta_1 \Delta_{1y}$, либо (что равносильно) условия $\Delta_{1y} = -\Delta_{2x} \neq 0$, $\Delta_{2xy} = \Delta_2 \Delta_{2x}$.*

Мы не можем здесь останавливаться на преобразовании условий, данных теоремами этого параграфа, к другим их известным формам, не зависящим от ограничения 4) теоремы 1; равным образом мы не останавливаемся отдельно на случае номограммы второго жанра (не обязательно конической) и на номографических свойствах пар сопряженных гармонических функций.

§ 5. В силу леммы 5 проективно-дифференциальные инварианты Гурса — Пенлеве для канонического представления уравнения (2,1), как уже установлено выше (1,8), с точностью до знака равны параметрам автора ([3]) Δ_1 и Δ_2, а именно, $C = -\Delta_1$, $D = \Delta_2$. Поэтому равенства (1,8) позволяют найти каноническое представление для уравнения (2,1), что приводит к интегрируемой в условиях удовлетворения теоремы 1 системе дифференциальных уравнений Аппеля, как это показал Гронваль ([4]). Это же можно выполнить по методу автора, заключающемуся в интегрировании (интегрируемой в силу условий теоремы 1) системы уравнений (5,1)

$$\left(\frac{v_x}{u_x}\right)_x = 0, \ \left(\frac{v_y}{u_y}\right)_y = 0, \ \left[\ln \frac{(u_x v_y - u_y v_x)^2}{u_x^3}\right]_x = \Delta_1, \ \left[\ln \frac{(u_x v_y - u_y v_x)^2}{u_y^3}\right]_y = -\Delta_2. \tag{5,1}$$

§ 6. Легко, пользуясь изложенным методом, решить вопрос о наибольшем числе кривых, одновременно спрямляемых в декартовом абаке или в абаке Массо ([1]). Получаем теорему, гласящую, что в декартовом абаке всегда спрямляемы две кривые*, и подобные теоремы.

Очевидно, что все формулированные в §§ 2—4 теоремы и леммы имеют приложение к теории сеток (Gewebe), рассмотренных математиками школы Блашке ([5]), и дают аналитические критерии существования топологических соответствующее число раз дифференцируемых отображений одной плоскости на другую, спрямляющих три семейства кривых (вообще говоря). В самом деле, изложенное выше, как легко видеть, есть теория топологического соответствия плоскостей xOy и uOv. При этом соответствии семейства параллелей $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ и семейство кривых $z_1 = \text{const}$ и $z_2 = \text{const}$ преобразуются в семейства прямых $\psi_1 = \varphi_1 u + v$, $\psi_2 = \varphi_2 u + v$, $\bar{y}_{(1)} = \bar{x}_{(1)} u + v$, $\bar{y}_{(2)} = \bar{x}_{(2)} u + v$**.

Поступило
22 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Глаголев, Теоретические основы номографии, М., 1935. [2] И. А. Вильнер, ДАН, 58, № 5 (1947). [3] И. А. Вильнер, Прикладн. матем. и мех., 4, в. 2 (1941). [4] T. H. Gronwall, Journ. d. math. pures et appl., sér. 6, 8, 59 (1912). [5] W. Blaschke u. Cr. Bol, Geometrie d. Gewebe, Berlin, 1938.

* См. систему двух уравнений (1,5) с двумя неизвестными функциями $(\ln \bar{v}^2 / \bar{u})_x$ и $(\ln \bar{u}^2 \bar{v})_y$ для рассматриваемого случая.

** Линии $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $z_1 = \text{const}$ образуют прямолинейную сетку.