Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ПОЛИНОМАМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 8 I 1950)

1. Пусть заданы треугольная матрица чисел

$$\begin{matrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}\, x_2^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(n)}\, x_2^{(n)}\ \ldots\ x_n^{(n)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix} \tag{1}$$

$$-1 \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

и функция $f(x)$, определенная в интервале $[-1, 1]$.

Обозначим через $L_n(f, x)$ интерполяционный полином Лагранжа, построенный для функции $f(x)$ и для матрицы (1). Согласно классическому результату С. Н. Бернштейна — Г. Фабера, не существует матрицы (1), при которой для любой непрерывной функции выполняется равномерно в интервале $[-1, 1]$ соотношение

$$L_n(f, x) \to f(x), \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Тем не менее, С. Н. Бернштейну [1] удалось в случае чебышевской матрицы узлов $\left(x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n\right)$ построить равномерно сходящийся для любой непрерывной функции интерполяционный процесс $\{A_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$, у которого отношение λ_n степени полинома $A_n(f, x)$ к числу его узлов сколь угодно близко к 1. Однако в интерполяционном процессе С. Н. Бернштейна λ_n не стремится к 1 при $n \to \infty$. В настоящей заметке мы хотим доказать, что результат С. Н. Бернштейна является в некотором смысле точным.

2. Введем оператор

$$A_n(f, x) = L_n(f, x) + \sum_{i=1}^{\sigma} A_i^{(n)}(f)\, p_i^{(n)}(x), \tag{3}$$

где $\{A_i^{(n)}(f)\}_{i=1}^{\sigma}$ $(n = 1, 2, \ldots, \sigma)$ — произвольные линейные функционалы, нормы которых ограничены в совокупности, и $\{p_i^{(n)}(x)\}_{i=1}^{\sigma}$ — произвольные полиномы степени $\leqslant n + m$.

Теорема 1. *Если существует интегрируемая* (L) *функция* $g(x) \geqslant 0$ *в* $[-1, 1]$, *удовлетворяющая условиям*

$$\int_{-1}^{1} p_1^{(n)}(x) \cos j \arccos x\, g(x)\, dx = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots, (n-m), \quad i = 1, 2, \ldots, \sigma, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

тогда при $m=o(n)$ *и* $\sigma=o(n)$ *невозможно выбрать функционалы* $\{A_i^{(n)}(f)\}_{i=1}^{\sigma}$, $n=1, 2, \ldots$, *таким образом, чтобы оператор* (3) *сходился равномерно для любой непрерывной в* $[-1, 1]$ *функции* $f(x)$.

При доказательстве теоремы мы пользуемся методом Л. Фейера [2] с усовершенствованиями В. Ф. Николаева [3].

Положим, что

$$\varphi(\theta)=\frac{1}{N}\sum_{k=s+1}^{n-s}\frac{\cos k\theta}{n+s+1-k},$$

$$\psi(\theta)=-\frac{1}{N}\sum_{k=s+1}^{n-s}\frac{\cos(2n+2s+2-k)\theta}{n+s+1-k}, \quad \chi(\theta)=\varphi(\theta)+\psi(\theta).$$

При этом считаем, что $m<s\to\infty$ и $n/s\to\infty$. Кроме того, N мы выбираем так, что $|\chi(\theta)|\leqslant 1$.

Введем тригонометрический косинус-полином

$$\Phi(\theta, \alpha)=\frac{\chi(\theta-\alpha)+\chi(\theta+\alpha)}{2}=P(\theta, \alpha)+Q(\theta, \alpha),$$

где

$$P(\theta, \alpha)=\frac{1}{N}\sum_{k=s+1}^{n-s}\frac{\cos k\alpha\cos k\theta}{n+s+1-k},$$

$$Q(\theta, \alpha)=-\frac{1}{N}\sum_{k=s+1}^{n-s}\frac{\cos(2n+2s+2-k)\alpha\cos(2n+2s+2-k)\theta}{n+s+1-k}.$$

Пусть $g_1(\theta)=g(\cos\theta)\sin\theta$. При $\varepsilon>0$ существует такой тригонометрический полином $t(\theta)$, что $g_1(\theta)=t(\theta)+\rho(\theta)$, где $\int_0^{\pi}|\rho(\theta)|\,d\theta<\varepsilon$.

Допустим, что оператор (3) равномерно сходится для любой непрерывной функции. В таком случае нормы оператора $\|A_n\|$ должны быть ограничены $\|A_n\|\leqslant A$ $(n=1, 2, \ldots)$. Легко видеть, что при достаточно большом s

$$\int_0^{\pi}A_n[Q(\theta, \alpha), \theta]_{\theta=\alpha}t(\alpha)\,d\alpha=0, \qquad \left|\int_0^{\pi}A_n[Q(\theta, \alpha), \theta]_{\theta=\alpha}\rho(\alpha)\,d\alpha\right|\leqslant\varepsilon A\ln\frac{n}{2s}.$$

Поэтому

$$\left|\int_0^{\pi}A_n[Q(\theta, \alpha), \theta]_{\theta=\alpha}g_1(\alpha)\,d\alpha\right|\leqslant\varepsilon A\ln\frac{n}{2s}. \tag{4}$$

Замечаем далее, что $L_n[P(\theta, \alpha), \theta]\equiv P(\theta, \alpha)$. Поэтому

$$\int_0^{\pi}L_n[P(\theta, \alpha), \theta]_{\theta=\alpha}g_1(\alpha)\,d\alpha>\frac{B}{N}\ln\frac{n}{2s}+\int_0^{\pi}\varphi(2\alpha)g_1(\alpha)\,d\alpha, \tag{5}$$

где $B<\int_0^{\pi}g_1(\alpha)\,d\alpha$. Рассуждая для интеграла из правой части (5) таким же образом, как при выводе (4), мы получим

$$\left|\int_0^{\pi}\varphi(2\alpha)g_1(\alpha)\,d\alpha\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{N}\ln\frac{n}{2s}. \tag{6}$$

Пусть $A_i^{(n)}(\cos k\theta) = b_{i,k}^{(n)}$. Тогда из ограниченности норм функционалов $A_i^{(n)}(f)$ следует, что $|b_{i,k}^{(n)}| < c_1$, где c_1 не зависит от i, k, n. Следовательно,

$$\left| \int_0^\pi \sum_{i=1}^{\sigma} A_i^{(n)} [P(\theta, \alpha)] \tilde{P}_i^{(n)}(\alpha) g_1(\alpha) d\alpha \right| < c_2 \frac{\sigma}{n} \ln \frac{n}{2s}, \quad \tilde{P}_i^{(n)}(\alpha) = P_i^{(n)}(\cos\alpha). \quad (7)$$

Из (4), (5), (6), (7) следует неравенство

$$\left| \int_0^\pi A_n [\Phi(\theta, \alpha), \theta]_{\theta=\alpha} g_1(\alpha) d\alpha \right| > c_3 \ln \frac{n}{2s},$$

что противоречит ограниченности оператора $A_n(f, n)$.

Рассмотрим следующий частный случай оператора (3):

$$A_n(f, x) = L_n(f, x) + \sum_{i=1}^{\sigma} [A_i^{(n)}(f) - f(x_{k_i}^{(n)})] \, l_{k_i}^{(n)}(x), \quad (8)$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_\sigma$ — любое подмножество из $\{k\}_{k=1}^{(n)}$; $\{l_{k_i}^{(n)}(x)\}_{i=1}^{\sigma}$ суть фундаментальные полиномы Лагранжа матрицы (1) и $\{A_i^{(n)}(f)\}$ — произвольные линейные функционалы. С. Н. Бернштейн ([1]) доказал, что можно функционалы $\{A_i^{(n)}(f)\}$ выбрать таким образом, чтобы для оператора (8) в случае матрицы Чебышева выполнялось равномерно для любой непрерывной функции в $[-1, 1]$ соотношение

$$A_n(f, x) \to f(x), \quad n \to \infty. \quad (9)$$

В моей заметке ([4]) доказывается, что интерполяционный процесс С. Н. Бернштейна сходится равномерно для любой непрерывной функции при некотором классе матриц узлов.

Однако в этом интерполяционном процессе отношение степени полинома $A_n(f\ x)$ к числу его узлов не стремится к 1 при $n \to \infty$. Точнее, $\sigma = O(n)$, но $\sigma \neq o(n)$.

Теорема 2 показывает, что результат С. Н. Бернштейна является в некотором смысле точным.

Теорема 2. *Если матрица* (1) *удовлетворяет условиям*

$$\int_{-1}^{1} l_k^{(n)}(x) \cos j \arccos x \, g(x) \, dx = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (10)$$

где $g(x) \geqslant 0$ — *некоторая* (L)*-интегрируемая функция, то при* $\sigma = o(n)$ *нельзя выбрать функционалы* $\{A_i^{(n)}(f)\}_{i=1}^{\sigma}$ *таким образом, чтобы оператор* (8) *удовлетворял соотношению* (9) *равномерно для. любой непрерывной функции в* $[-1, 1]$.

Эта теорема является следствием* теоремы 1.

Из теоремы 2 легко получить следующую теорему:

Теорема 3. *Если числа Кристоффеля ортогональной системы полиномов* $K_\nu^{(n)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, *то при* $\sigma = o(n)$ *нельзя выбрать функционалы* $A_i'^{(n)}(f)$ *таким образом, чтобы для оператора* (8) *выполнялось соотношение* (9) *равномерно для любой непрерывной функции в* $[-1, 1]$ *при условии, что матрица* (1) *состоит из корней этой ортогональной системы полиномов.*

Доказательство. Пусть $\{\omega_n(x)\}$ — ортогональная система полиномов веса $g(x)$.

---

* В теореме 2 можно без ограничения общности считать, что нормы функционалов ограничены в совокупности.

Так как $l_\nu^{(n)}(x)\cos j \arccos x$ при $j=0, 1, 2, \ldots, n$ есть полином степени $\leqslant 2n-1$, то по формуле механических квадратур с узлами в корнях полинома $\omega_n(x)$ мы имеем:

$$\int_{-1}^{1} l_\nu^{(n)}(x)\cos j \arccos x\, g(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} l_\nu(x_i)\cos j \arccos x_i \cdot K_i^{(n)} = \cos j \arccos x_\nu \cdot K_\nu^{(n)};$$

следовательно, выполняются условия теоремы 2.

Теорема 4. *Если вес $g(x) \geqslant 0$ ортогональной системы полиномов удовлетворяет условию $g(x)\sqrt{1-x^2} \leqslant M$ при $x \in [-1, 1]$, то при $\sigma = o(n)$ нельзя выбрать функционалы $\{A_i^{(n)}(f)\}$ таким образом, чтобы для любой непрерывной функции оператор* (8) *удовлетворял бы равномерно соотношению* (9) *при условии, что матрица* (1) *состоит из корней этой ортогональной системы полиномов.*

Эта теорема является следствием теоремы 3, ибо, согласно результату Эрдеша и Турана ([5]), при выполнении условия $g(x)\sqrt{1-x^2} \leqslant M$, $x \in [-1, 1]$, числа Кристоффеля соответствующей матрицы равны $O(1/n)$.

3. Пусть функция $\omega(t)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $\omega(t)$ непрерывна при $0 \leqslant t < \infty$; 2) $0 \leqslant \omega(t_1) \leqslant \omega(t_2)$ при $0 < t_1 \leqslant t_2$; 3) $\omega(t_1+t_2) \leqslant \omega(t_1)+\omega(t_2)$; 4) $\omega(0)=0$.

Обозначим через C_ω множество тех непрерывных функций $f(x)$, $x \in [-1, 1]$, для которых $|f(x+h)-f(x)| \leqslant K\omega(h)$ при $-1 \leqslant x < x + h \leqslant +1$, где K — константа, зависящая от f.

Определим теперь некоторый класс матриц узлов интерполирования.

Матрица (1) называется регулярной, если: 1) существует конечное положительное число C такое, что для всех $x \in [-1, 1]$ $\sum_{k=1}^{n}[l_k^{(n)}(x)]^2 < C$ $(n=1, 2, \ldots)$; 2) для любого $x \in [-1, 1]$ при $x_k^{(n)} < x_{k+1}^{(n)} \leqslant x$ $|l_k^{(n)}(x)| \leqslant |l_{k+1}^{(n)}(x)|$ $(n=1, 2, \ldots)$ и при $x \leqslant x_k^{(n)} < x_{k+1}^{(n)}$ $|l_k^{(n)}(x)| \geqslant |l_{k+1}^{(n)}(x)|$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Теперь мы можем сформулировать следующие теоремы ([6]).

Теорема 5. *Если матрица* (1) *регулярная, то можно построить оператор вида* (8) *с отношением* степени полинома $A_n(f, x)$ к числу узлов, стремящимся к 1 при $n \to \infty$, так, что для любой $f \in C_\omega$ имеет место равномерно соотношение* (9).

Из моей заметки и теоремы 5 следует теорема 6.

Теорема 6. *Если матрица* (1) *якобиева с параметрами $-1 \leqslant \alpha < 0$, $-1 \leqslant \beta < 0$, то можно построить оператор вида* (8) *с отношением степени полинома $A_n(f, x)$ к числу узлов, стремящимся к 1 при $n \to \infty$, так, что для $f \in C_\omega$ имеет место равномерно соотношение* (9).

Поступило
9 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, 4, 5, 49 (1932). [2] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, 1949, стр. 512. [3] В. Ф. Николаев, ДАН, 61, № 2 (1948). [4] Д. Л. Берман, ДАН, 60, № 3 (1948). [5] P. Erdös and P. Turan, Ann. Math., 41, 510 (1940). [6] Д. Л. Берман, Диссертация, ЛГУ, 1948.

* Заметим, что это отношение зависит лишь от $\omega(x)$.