Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. И. РУБИНШТЕЙН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ФАЗ В ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕФАНА

(Представлено академиком С. Л. Лейбензоном 6 I 1951)

В настоящей заметке рассматривается вопрос об асимптотическом поведении границы $x = y(t)$ раздела фаз в одномерной задаче Стефана на отрезке для случая ньютоновского излучения на одном из концов отрезка.

Указанная задача состоит в определении температур $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ и границы $x = y(t)$ раздела фаз, исходя из условий:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial u_1}{\partial t}; \quad 0 < x < y(t);$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - h\right) u_1 \Big|_{x=0} = - h(t); \quad u_1 \Big|_{x=y(t)} = 0; \quad u_1(x, 0) = \varphi_1(x);$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial u_2}{\partial t}; \quad y(t) < x < 1; \quad u_2 \Big|_{x=y(t)} = 0; \quad u_2 \Big|_{x=1} = f_2(t); \quad u_2 \Big|_{t=0} = \varphi_2(x);$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} u_1 - \frac{\partial}{\partial x} u_2 \Big|_{x=y(t)}; \quad 0 < y(0) < 1. \tag{1}$$

Будем считать, что

$$f_1(t) < 0; \quad \varphi_i(y(0)) = 0; \quad \varphi_1 \leqslant 0; \quad \varphi_2 \geqslant 0; \quad \varphi_2(1) = f_2(0); \quad f_2(t) > 0; \tag{1*}$$

и, сверх того,

$$h \inf |f_1(t)| > \sup f_2(t), \quad 0 < t < \infty. \tag{1**}$$

Кроме того, считаем, что f_i и φ_i дважды непрерывно дифференцируемы.

Решение этой задачи на малом интервале времени может быть построено сведением к системе интегральных уравнений по методу, развитому в [1] или [2]. Возможность расширения интервала определения решения на произвольно большой отрезок времени устанавливается без труда с помощью следующих лемм, являющихся почти очевидным следствием экстремальных свойств супер- и субпараболических функций.

Лемма 1. *Пусть $u(x, t)$ субпараболична (суперпараболична) в области D: $\chi_1(t) < x < \chi_2(t)$, $t \geqslant 0$, и удовлетворяет на ее границах условиям:*

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial}{\partial x} - h\right) u \Big|_{x=\chi_1(t)} \geqslant 0 \ (\leqslant 0); \\ u(x, 0) \leqslant 0 \ (\geqslant 0); \quad u \Big|_{x=\chi_2(t)} \leqslant 0 \ (\geqslant 0). \end{gathered} \tag{2}$$

Тогда всюду в области D

$$u(x, t) \leqslant 0 \quad (u(x, t)) \geqslant 0. \tag{2*}$$

Лемма 2. *Пусть $u_{11}(x, t)$ и $u_{21}(x, t)$ суперпараболичны в областях $0 < x < z_1(t)$ и $z_1(t) < x < 1$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, соответственно, и, сверх того,*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - h\right) u_{11} \Big|_{x=0} \leqslant -hf_1(t);$$

$$u_{11}(x, 0) \geqslant \varphi_1(x) \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant z_1(0); \quad u_{11}\big|_{x=z_1} = 0; \tag{3}$$

$$u_{21}(z_1(t), t) = 0; \quad u_{21}(x, 0) \geqslant \varphi_2(x) \quad \text{при } z_1(0) < x < 1;$$

$$u_{21}(1, t) \geqslant f_2(t); \qquad \frac{dz_1}{dt} < \frac{\partial}{\partial x} u_{11} - \frac{\partial}{\partial x} u_{12} \Big|_{x=z_1(t)} \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T$$

и существует окрестность $t = 0$, в которой

$$z_1(t) \leqslant y(t). \tag{3*}$$

Тогда при всех $t \subset (0, T)$

$$z_1(t) \leqslant y(t). \tag{3**}$$

Очевидно, что если $u_{i2}(x, t)$ субпараболичны, во всех условиях и утверждении леммы надлежит изменить знак неравенств.

Доказательство существования решения на всем интервале $(0, T)$ строится аналогично тому, как оно выполнено в ([3]).

Пусть теперь

$$\lim_{t \to \infty} f_1(t) = -T_1 < 0; \quad \lim_{t \to \infty} f_2(t) = T_2 > 0. \tag{4}$$

В этом случае

$$\lim_{t \to \infty} u_i(x, t) = U_i(x); \quad \lim_{t \to \infty} y(t) = l, \tag{5}$$

причем предельный переход совершается равномерно по x, а $U_i(x)$, l являются решением стационарной задачи, отвечающей задаче (1), т. е.

$$U_1(x) = -\frac{hT_1(l - x)}{1 + lh}; \quad U_2(x) = T_2 \frac{x - l}{1 - l}; \quad l = \frac{hT_1 - T_2}{h(T_1 + T_2)}. \tag{5*}$$

Это утверждение, тривиальное с точки зрения физической интуиции, нуждается в строгом обосновании, поскольку априори нельзя утверждать, что граница $x = y(t)$ не колеблется при $t \to \infty$.

Для доказательства теоремы достаточно установить существование $t_0 > 0$ и $t_1 \geqslant t_0$, соответствующих произвольно малому $\varepsilon > 0$, так, что, каково бы ни было $t_2 \geqslant t_1$, можно указать $z_j(t)$ и $u_{ij}(x, t)$ $(j = 1, 2)$ такие, что u_{i1} суперпараболичны, а u_{i2} субпараболичны, удовлетворяют при $0 \leqslant t \leqslant t_2$ всем условиям леммы 2, причем

$$z_1(t_2) = l - \varepsilon; \quad z_2(t_2) = l_2 + \varepsilon. \tag{6}$$

Легко видеть, что можно в качестве требуемого t_0 взять столь большое, что при всех $t \geqslant t_0$

$$u_1(x, t) \geqslant -\frac{h(T_1 + \varepsilon^*)(1 - x)}{1 + h}, \quad 0 < x < y(t);$$

$$u_2(x, t) \leqslant (T_2 + \varepsilon^*)x; \quad y(t) < x < 1; \tag{7}$$

$$(T_1 - \varepsilon^{**}) < |f_1(t)| < T_1 + \varepsilon^{**}; \quad (T_2 - \varepsilon^*) < f_2 < T_2 + \varepsilon^{**},$$

где ε^*, ε^{**} — произвольно малые положительные числа. Существование такого t_0 следует из леммы 1 и принципа максимума.

В качестве $u_{11}(x, t)$, $u_{21}(x, t)$ и $z_1(t)$ можно взять решения задачи:

$$\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial u_{11}}{\partial t}; \quad 0 < x < z_1(t) \equiv \alpha_1(t);$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - h\right) u_{11}\Big|_{x=0} = hT_{11} = h\,(T_1 - \eta); \quad u_{11}\Big|_{x=z_1} = 0; \tag{8}$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x^2} = \frac{\partial u_{21}}{\partial t}; \quad z_1(t) < x < 1; \quad u_{21}\Big|_{x=z_1} = 0;$$

$$u_{21}\Big|_{x=1} = T_{21} = T_2 + \eta; \quad u_{21}\Big|_{t=0} = T_{21}x,$$

где $\eta > 0$ — некоторое малое число, зависящее от ε, и α_1 подлежит ограничению сверху (ради упрощения записи мы приняли $t_0 = 0$). Очевидно, достаточно установить, что u_{i1}, z_1, так определенные, удовлетворяют последнему из условий (3) леммы 2.

Представляя $u_{21}(x, t)$ в виде

$$u_{21}(x, t) = T_{21}\left(1 - \frac{1 - x}{1 - \alpha_1 t}\right) + w_{21}(x, t),$$

легко убедимся, на основании принципа максимума, в том, что при $0 \leqslant t \leqslant t_2 = \dfrac{l - \varepsilon}{\alpha_1}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} u_{21}\Big|_{x=\alpha_1 t} = \frac{T_{21}}{1 - \alpha_1 t} + v_{21}(\alpha_1, t), \tag{9}$$

где v_{21} равномерно стремится к нулю при $\alpha_1 \to 0$.

С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial x} u_{11}\Big|_{x=\alpha_1 t} = \frac{4hT_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty x e^{-\frac{\alpha_1^2 t}{4} - x^2} \frac{dx}{\operatorname{ch} \alpha_1 \sqrt{t}\, x} \int\limits_0^x \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha_1 \sqrt{t}\, z}{\operatorname{ch} \alpha_1 \sqrt{t}\, x}\right)^{2h/\alpha_1} dz. \tag{10}$$

Полагая $0 \leqslant \alpha_1 t = \tau \leqslant l - \varepsilon$, $\alpha_1 = \beta^2$ и переходя к пределу при $\beta \to 0$, убедимся в том, что

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{\partial}{\partial x} u_{11}\Big|_{x=\tau} = \frac{hT_{11}}{1 + h\tau^2},$$

но это означает, что

$$\frac{\partial}{\partial x} u_{11}\Big|_{x=\alpha_1 t} = \frac{hT_{11}}{1 + h\alpha_1 t} + v_{11}(\alpha_1, t), \tag{11}$$

где v_{11} равномерно стремится к нулю при $\alpha_1 \to 0$ на всем интервале $0 \leqslant \alpha_1 t \leqslant l - \varepsilon$. Выбирая теперь $\eta > 0$ и α_1^* достаточно малыми и полагая $t_1 = \dfrac{l - \varepsilon}{\alpha_1^*}$, без труда убедимся в справедливости нашего утверждения для всех $t_2 \geqslant t_1$.

Совершенно аналогично определим u_{i2}, z_2, удовлетворяющие второй части леммы 2 и условию

$$z_2(t_2) = l + \varepsilon.$$

После того как установлено существование предела $y(t)$ при $t \to \infty$, без труда, с помощью принципа максимума, устанавливается справедливость первых двух предельных равенств (5).

Совершенно аналогично можно установить существование асимптотического решения в случае задания на границе $x = 0$ не теплообмена, но температуры $f(t) < 0$, стремящейся при $t \to \infty$ к некоторому отрицательному пределу.

В заключение отметим, что доказанное предложение может служить обоснованием известного приближенного метода решения задач Стефана, данного Л. С. Лейбензоном [4].

Поступило
11 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Рубинштейн, ДАН, **58**, № 2 (1947). [2] Л. И. Рубинштейн, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 1 (1947). [3] Л. И. Рубинштейн, ДАН, **62**, № 2 (1948). [4] Л. С. Лейбензон, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 625 (1939).