

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. Д. ТАРАБАСОВ

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ
С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПРЕССОВАННЫМИ В НЕЕ КРУГЛЫМИ ДИСКАМИ**

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 23 XII 1950)

Рассмотрим эллиптическую тонкую пластину, заполняющую много-связную область S_0 , расположенную в плоскости $z = x + iy$ и ограниченную извне эллипсом γ_0 с полуосями a и b с центром в начале координат, а внутри — окружностями γ_n радиусов r_n с центрами в точках b_n . Будем считать, что окружности γ_n ($n = 1, 2, \dots, m$) не пересекают друг друга. Область диска n обозначим через S_n . Предположим далее, что в каждое круглое отверстие пластины запрессован с заданным упругим натягом круглый диск одинаковой с ней толщины. Механические характеристики материала пластины и дисков будем считать одинаковыми.

В настоящей статье дается решение задачи в предположении, что на контуре γ_0 могут быть заданы любые граничные условия, а на остальных контурах γ_n ($n = 1, 2, \dots, m$) заданы упругие скачки смещения⁽³⁾. Здесь впервые дается обобщение решения подобных задач и на тот случай, когда при запрессовке дисков центры их смещаются относительно центров отверстий.

Пусть центр диска n (b'_n, ia'_n) смещается в направлении произвольной оси x_n , составляющей с осью x угол θ_n и отсекающей на ней отрезок b_n^0 , на величину β'_n . Тогда радиальный упругий скачок смещения можно записать в следующем виде (знак минус принимается при смещении центра диска в направлении, противоположном оси x_n):

$$\delta'_{n\alpha} = \delta'_n \pm \frac{\beta'_n}{2r_n} (t_n + \bar{t}_n), \quad t_n = (t - b_n^0) e^{-i\theta_n} - \rho_n, \quad (1)$$

где t_n и \bar{t} — соответственно, аффиксы точек окружности γ_n в системах $x_n y_n$ и $x y$, $\rho_n^2 = a_n'^2 + (b'_n - b_n^0)^2$, $\delta'_n = r_n'' - r_n'$, а r_n' и r_n'' — соответственно, первоначальный упругий радиус отверстия и диска до посадки.

Решение поставленной задачи сводится⁽¹⁾ к определению функций $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, регулярных в соответственных областях S_n ($n = 0, 1, 2, \dots, m$) и удовлетворяющих заданным условиям на границах:

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = f(t) \text{ на } \gamma_0, \quad (2)$$

$$\kappa\varphi_n^*(t) - t\overline{\varphi_n^{*\prime}(t)} - \overline{\psi_n^*(t)} = \delta_{n\alpha}(t - b_n), \quad (3)$$

$$\varphi_n^*(t) + t\overline{\varphi_n^{*\prime}(t)} + \overline{\psi_n^*(t)} = 0 \text{ на } \gamma_n, \quad (n = 1, 2, \dots, m), \quad (4)$$

где $\delta_{n\alpha} = 2\delta'_{n\alpha} Gr_n^{-1}$, $\kappa = (3 - \mu)(1 + \mu)^{-1}$, $\beta_n = 2\beta'_n Gr_n^{-1}$, $\delta_n = 2\delta'_n Gr^{-1}$,

G — модуль сдвига, а μ — коэффициент Пуассона. Кроме того, мы положили на γ_n ($n = 1, 2, \dots, m$)

$$\varphi_0(t) - \varphi_n(t) = \varphi_n^*(t), \quad \psi_0(t) - \psi_n(t) = \psi_n^*(t). \quad (5)$$

Из уравнений (3) и (4) найдем значения для $\varphi_n^*(t)$ и $\psi_n^*(t)$, а затем, вводя новые функции, регулярные в S_0 и равные

$$\varphi(z) = \varphi_0(z), \quad \psi(z) = \psi_0(z) + F(z) \quad *, \quad (6)$$

$$F(z) = \sum_{n=1}^m \frac{1}{2(1+\kappa)} \left\{ \frac{r_n^2}{z - \bar{b}_n} \left[4\delta_n + \frac{2\beta_n}{r_n} (2\rho_n + 2b_n^0 \cos \theta_n - \bar{b}_n e^{i\theta_n} - b_n e^{-i\theta_n}) \right] \pm \frac{\beta_n r_n^3 e^{i\theta_n}}{(z - \bar{b}_n)^2} \right\},$$

будем иметь следующие зависимости на γ_n ($n = 1, 2, \dots, m$):

$$\varphi(t) = \varphi_n(t) + \varphi_n^*(t), \quad \psi(t) = \psi_n(t) + \psi_n^*(t) + F(t). \quad (7)$$

Можно показать ⁽⁴⁾, что функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитически продолжимы из области S_0 в каждую из областей S_n ($n = 1, 2, \dots, m$) и будут регулярными всюду в области S , ограниченной γ_0 ^{**}.

Исключая из уравнения (2) $\varphi_0(t)$ и $\psi_0(t)$, получим

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = \overline{F(t)} + f(t). \quad (8)$$

В случае, когда все $\beta_n = 0$, из уравнения (8) имеем:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = \sum_{n=1}^m \frac{2r_n^2 \delta_n}{(1+\kappa)(\bar{t} - \bar{b}_n)} + f(t). \quad (8a)$$

Уравнения (8) и (8a) показывают, что решение нашей задачи сводится к решению задачи для эллипса, решенной впервые Н. И. Мусхелишвили ⁽¹⁾ и затем другим методом Д. И. Шерманом ⁽⁵⁾. Второе из этих решений дает для контурных значений искомых функций $\varphi^*(\sigma) = \varphi(t)$ и $\psi^*(\sigma) = \psi(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi^*(\sigma) &= a_0 + \sum_1^\infty a_k (\sigma^k + \sigma^{-k}), \\ \psi^*(\sigma) &= \bar{a}_0 + [(\bar{a}_{-1} + \bar{a}_1) - (a_1 + \bar{a}_1)] (\sigma + \sigma^{-1}) \rho^{-2} + \\ &+ \sum_2^\infty \left[(\bar{a}_{-k} \rho^{-2k} - k a_k \rho^{-2}) (\sigma^k + \sigma^{-k}) - \frac{k}{k-1} R (1 + \rho^4) \rho^{-2} a_k \frac{\partial}{\partial \sigma} (\sigma^{k-1} + \sigma^{-k+1}) \frac{d\sigma}{dt} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$t = R(\sigma + \sigma^{-1}), \quad R = 0,5(a^2 - b^2)^{1/2}, \quad \rho = (a + b)c^{-1}, \quad (10)$$

причем σ — аффикс точки окружности радиуса ρ и $c = 2R$ — половина фокусного расстояния, где $a_0 = 0$, а остальные коэффициенты определяются из формулы

$$a_k = A_k [(1 - \rho^{-4k}) + k(\rho^4 - 1)\rho^{-2(k+1)}]^{-1}. \quad (11)$$

Полагая $f(t) = 0$, правую часть (8a) можно с желаемой точностью представить в виде следующего укороченного ряда:

$$\sum_{k=0}^s A_k \sigma^k = \sum_{n=1}^m \frac{2\delta_n r_n^2 \rho^2}{(1+\kappa)R(C_{1n} - C_{2n})} \sum_{k=0}^s \sigma^{k+1} (C_{2n}^{-(k+1)} - C_{1n}^{-(k+1)}), \quad (12)$$

* Нижние знаки в выражении $F(z)$ соответствуют знаку минус формулы (1).

** Здесь мы используем метод, предложенный Д. И. Шерманом ⁽²⁾.

где

$$C_{1n} = \rho^2 (\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 - 1}), \quad C_{2n} = \rho^2 (\alpha_n - \sqrt{\alpha_n^2 - 1}), \quad \alpha_n = b_n / 2R. \quad (13)$$

Для частного случая, когда $m = 2$, $b_1 = -a_1$, $b_2 = a_2$ (центры дисков расположены на оси x), $\cos \varphi = a_1 (2R)^{-1} < 1$, $\cos \varphi_1 = a_2 (2R)^{-1} < 1$, из разложения (12) получим следующую формулу для A_k :

$$A_k = \frac{2}{(1 + \chi)R} \left[r_2^2 \delta_2 \frac{\sin k \varphi_1}{\sin \varphi_1} + (-1)^{k+1} r_1^2 \delta_1 \frac{\sin k \varphi}{\sin \varphi} \right] \rho^{-2k} \quad (k = 1, 2, \dots, s). \quad (14)$$

Формула (14) позволяет рассмотреть ряд практически интересных частных случаев: 1) $|a_1| = |a_2|$, $r_1 \delta_1 = r_2 \delta_2$; 2) $r_2 = 0$ (запрессован один диск); 3) $r_2 = 0$, $a_1 = 0$ (диск запрессован в центре эллиптической пластины); 4) вытянутый эллипс (полоса) с расположенными на оси x дисками и др.

Подставляя значения коэффициентов a_k в формулы (9), переходя от σ к z^* согласно преобразованию (10), получим искомые решения для $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

Для частного случая, когда $m = 2$, $b_1 = -a_1$, $b_2 = a_2$, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеют следующие выражения:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^s D_k z_0^k, \quad \psi(z) = - \sum_{k=0}^s B_k z_0^k \quad (k = 0, 1, \dots, s), \quad (15)$$

где

$$D_k = \gamma_{k,k} a_k + \gamma_{k,k+2} a_{k+2} + \gamma_{k,k+4} a_{k+4} + \dots + \gamma_{k,s} a_s, \quad z_0^k = \frac{z^k}{R^k},$$

$$B_k = \gamma_{k,k} (k \rho^{-2} + \rho^{-2k}) a_k + \gamma_{k,k+2} [-\rho^2 + (k+1) \rho^{-2} + \rho^{-2(k+2)}] a_{k+2} +$$

$$+ \gamma_{k,k+4} [-2\rho^2 + (k+2) \rho^{-2} + \rho^{-2(k+4)}] a_{k+4} + \dots$$

$$\dots + \gamma_{k,s} \left[-\frac{s-k}{2} \rho^2 + \frac{s+k}{2} \rho^{-2} + \rho^{-2s} \right]. \quad (16)$$

В последних слагаемых выражений для D_k и B_k величину s надо заменить на $s-1$, если k имеет четность обратную s . Коэффициенты $\gamma_{k,k+2n}$ легко определяются из рекуррентной зависимости

$$\gamma_{k,k+2n} = -\gamma_{k,k+2(n-1)} + \gamma_{k-1,k+2n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \quad (17)$$

при этом $\gamma_{k,k} = 1$, $\gamma_{0,k} = 0$ ($k = 1, 3, \dots$) и $\gamma_{0,k} = 2(-1)^{k/2}$ ($k = 2, 4, 6, \dots$).

Компоненты напряжений для области S_0 имеют следующий вид:

$$\sigma_{\frac{x}{y}} = \frac{1}{R} \sum_{k=0}^s k r_0^{k-1} [(2D_k + B_k) \cos(k-1)\varphi \mp (k-1) D_k \cos(k-3)\varphi] \mp$$

$$\mp 2 \left\{ \delta_1 \frac{r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2a_1 r \cos \varphi + a_1^2}{(r^2 + 2a_1 r \cos \varphi + a_1^2)^2} + \delta_2 \frac{r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - 2a_2 r \cos \varphi + a_2^2}{(r^2 - 2a_2 r \cos \varphi + a_2^2)^2} \right\}; \quad (18)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{R} \sum_{k=0}^s k r_0^{k-1} [B_k \sin(k-1)\varphi - (k-1) D_k \sin(k-3)\varphi] +$$

$$+ 2 \left\{ -\delta_1 \frac{2r \sin \varphi (a_1 + r \cos \varphi)}{(r^2 + 2a_1 r \cos \varphi + a_1^2)^2} + \delta_2 \frac{2r \sin \varphi (a_2 - r \cos \varphi)}{(r^2 - 2a_2 r \cos \varphi + a_2^2)^2} \right\}, \quad r_0 = \frac{r}{R}. \quad (19)$$

Нижние знаки соответствуют напряжению σ_y .

* Степенной двучлен $\sigma^k + \sigma^{-k}$ можно представить в виде полинома от t . Для определения коэффициентов этого полинома $\gamma_{k,k+2n}$ нами найдена рекуррентная зависимость, которая может быть использована и при решении других задач теории упругости.

Для случая, когда $m = 2$, $|a_1| = |a_2| = 5$ см, $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см², $a = 10$ см, $b = 6$ см, $r_1 = r_2 = 3$ см, и относительный упругий натяг $\lambda = 0,001$, нами построены эпюры напряжений для σ_x и σ_y на полуосях эллипса (рис. 1). Числовые значения даны в кг/см².

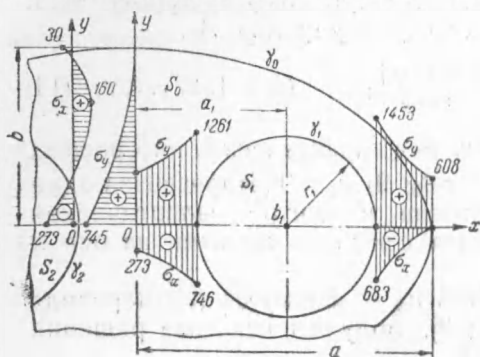


Рис. 1

Отметим, что принятый закон для $\delta'_{n\alpha}$ (уравнение (1)) можно использовать при решении любых задач о запрессовке круглых дисков в односвязные или многосвязные области, в частности, когда контур γ_0 — окружность⁽⁴⁾. В случае запрессовки в пластину дисков других форм (многоугольник, эллипс и т. п.) закон для $\delta'_{n\alpha}$ также можно всегда найти.

Нами выделена также главная часть из разложения для $\varphi^*(\sigma)^*$, когда $|a_1| = |a_2|$ и $r_1^2 \delta_1 = r_2^2 \delta_2$. Взяв в ряде для $\varphi^*(\sigma)$ два члена,

мы остальные просуммировали с достаточной точностью, положив при $\rho = 2$ и начиная с $k \geq 5$ ($a_k = 0$ для четных k):

$$a_k = A_k [(1 - \rho^{-4k}) + k(\rho^4 - 1)\rho^{-2(k+1)}]^{-1} \cong A_k [1 - k(\rho^4 - 1)\rho^{-2(k+1)}]. \quad (20)$$

После некоторых преобразований мы получили

$$\begin{aligned} \varphi^*(\sigma) = & D_n \sum_{k=1,3} \rho^{-2k} [(1 - \rho^{-4k}) + k(\rho^4 - 1)\rho^{-2(k+1)}]^{-1} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \sin k\varphi + \\ & + D_n \rho^{-10} \sum_{k=1,3,\dots,7} C'_k (\sigma^k + \sigma^{-k}) \left[\sum_{k=0,2,4} d'_k (\sigma^k + \sigma^{-k}) \right]^{-1} - \\ & - D_n \rho^{-20} \sum_{k=1,3,\dots,11} C_k (\sigma^k + \sigma^{-k}) \left[\sum_{k=0,2,\dots,8} d_k (\sigma^k + \sigma^{-k}) \right]^{-1}, \quad (21) \end{aligned}$$

где $D_n = 4r_1^2 \delta_1 [(1 + \chi) R \sin \varphi]^{-1}$, $D_n = (\rho^2 - \rho^{-2}) D_n$, $C'_1 = \rho^{-8} \sin 5\varphi$, $C'_3 = -\rho^{-4} (\sin 7\varphi + \sin 3\varphi)$, $C'_5 = \sin 5\varphi$, $C'_7 = -\rho^{-4} \sin 3\varphi$, $C_1 = 5\rho^{-16} (\sin \varphi + 4 \sin 5\varphi + \sin 9\varphi)$, $C_3 = -10\rho^{-8} (\sin 3\varphi + \sin 7\varphi)$, $C_5 = 5 \sin 5\varphi$, $C_7 = -\rho^{-8} (10 \sin 3\varphi + 3 \sin 7\varphi)$, $C_9 = \rho^{-16} (5 \sin \varphi + 6 \sin 5\varphi)$, $C_{11} = -3\rho^{-24} \sin 3\varphi$, $d'_0 = 1/2 + \rho^{-8} (1 + \cos 4\varphi)$, $d'_2 = -2\rho^{-4} \cos 2\varphi$, $d'_4 = -\rho^{-8}$, $d_0 = 1/2$, $d_2 = -4\rho^{-8} \cos 2\varphi$, $d_4 = 2\rho^{-16} (2 + \cos 4\varphi)$, $d_6 = -4\rho^{-24} \cos 2\varphi$, $d_8 = \rho^{-32}$.

Переходя в выражениях для $\varphi^*(\sigma)$ от σ к z , получим значение $\varphi(z)$. Аналогичным путем получим выделение главной части для $\psi(z)$. $\psi(z)$ можно также получить из уравнения (8a).

В заключение отметим, что изложенный здесь метод можно широко применить при решении плоских задач теории упругости для односвязных и многосвязных, конечных и бесконечных областей при запрессовке в них дисков различных форм.

Поступило
6 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. И. Мухелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, 1949. ² Д. И. Шерман, ДАН, 27, № 9 (1940). ³ Н. Д. Тарабасов, ДАН, 70, № 6 (1950). ⁴ Н. Д. Тарабасов, ДАН, 63, № 1 (1948). ⁵ Д. И. Шерман, ДАН, 31, № 4 (1941).

* Это всегда можно сделать, когда контур γ_0 — окружность или эллипс.