Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

С. ФОМИН

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЧИСТО ТОЧЕЧНЫМ СПЕКТРОМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 XII 1950)

1. Системы с чисто точечным спектром представляют собой наиболее простой и лучше всего изученный класс динамических систем с инвариантной мерой. С точки зрения чисто метрической, теория таких систем полностью закончена. Действительно, еще в 1932 г. Нейман ([1]) получил следующие результаты:

А. Всякая эргодическая динамическая система с чисто точечным спектром определяется своим спектром однозначно с точностью до изоморфизма, т. е. почти всюду взаимно-однозначного сохраняющего меру отображения. Спектр такой динамической системы всегда простой и представляет собой некоторую счетную подгруппу аддитивной группы действительных чисел.

Б. Для всякой счетной подгруппы Λ аддитивной группы действительных чисел существует эргодическая динамическая система, имеющая чисто точечный спектр, совпадающий с Λ.

В 1940 г. участниками семинара, работавшего в МГУ под руководством А. Н. Колмогорова, было доказано, что эргодическая динамическая система с данным чисто точечным спектром Λ всегда может быть реализована как система, определенная на группе характеров X дискретной группы Λ. При этом оператор сдвига на X определяется так:

$$S_t\chi(\lambda) = e^{i\lambda t}\chi(\lambda).$$

Позже, в 1942 г., этот результат был опубликован Нейманом и Халмосом ([2]).

Этот результат, в частности, показывает, что для каждой счетной подгруппы Λ аддитивной группы действительных чисел существует компактная строго эргодическая динамическая система с данным чисто точечным спектром Λ.

Динамическая система на группе характеров представляет собой наиболее простую и естественную реализацию динамической системы с данным чисто точечным спектром. Ниже такую динамическую систему мы будем называть канонической системой (с данным спектром). С метрической точки зрения, никаких других эргодических систем с чисто точечным спектром, кроме канонических, не существует.

Напротив, с точки зрения топологической приведенными выше результатами вопрос о классификации динамических систем с точечным спектром далеко не исчерпывается. Действительно, нетрудно привести примеры эргодических динамических систем, даже являющихся минимальными множествами, имеющих один и тот же чисто точечный спектр, но не гомеоморфных между собой. Поэтому естественно поставить вопрос о топологической классификации динамических систем с данным чисто точечным спектром. Настоящая заметка содержит некоторые относящиеся сюда результаты. При этом мы ограничиваемся рассмотрением компактных строго эргодических систем. В последнем параграфе полученные результаты применяются к исследованию траекторий на поверхности тора (теорема 5).

2. При изучении топологической структуры динамических систем с чисто точечным спектром важную роль играет следующий вопрос. Пусть Ω — компактная строго эргодическая динамическая система с чисто точечным спектром. Существует ли на Ω полная система непрерывных собственных функций? Этот вопрос представляет и самостоятельный интерес.

Прежде чем рассматривать вопрос о непрерывности собственных функций, покажем, как он связан с вопросом о классификации динамических систем, имеющих данный чисто точечный спектр Λ.

Теорема 1. *Для того чтобы компактная строго эргодическая динамическая система Ω с чисто точечным спектром Λ могла быть непрерывно отображена на каноническую динамическую систему с тем же самым спектром, необходимо и достаточно, чтобы на Ω существовала полная система непрерывных собственных функций.*

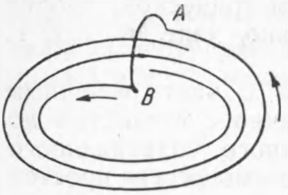

Рис. 1

Доказательство этой теоремы легко получается из теоремы Понтрягина о полноте характеров и из основных фактов теории нормированных колец.

Следующий простой пример показывает, что существуют динамические системы, на которых все собственные функции обязательно разрывны.

Пусть динамическая система Ω состоит из двух траекторий (см. рис. 1): окружности и двух навивающихся на нее спиралей, соединенных дугой AB. По окружности и по спиралям точки движутся с угловой скоростью 2π, т. е. делают полный оборот в единицу времени, а дуга AB проходится за некоторый иррациональный промежуток времени. Легко видеть, что получающаяся таким образом динамическая система — строго эргодическая, а единственная инвариантная мера на ней — обычная мера Лебега на окружности (вторая траектория имеет меру нуль). Спектр этой динамической системы — чисто точечный (собственные значения — все целые числа), но ни для одного из собственных значений не существует непрерывной собственной функции.

Ниже мы укажем условия, при которых непрерывность собственных функций имеет место.

3. Определение 1. Динамическая система, определенная на некотором метрическом пространстве с метрикой $r(p, q)$, называется *устойчивой по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $r(S_t p, S_t q) < \varepsilon$ для всех $t, -\infty < t < \infty$, как только $r(p, q) < \delta$.

Нетрудно дать полную классификацию всех компактных строго эргодических динамических систем, устойчивых по Ляпунову, именно: *Всякая компактная строго эргодическая динамическая система Ω, устойчивая по Ляпунову, гомеоморфна некоторой канонической динамической системе.*

Доказательство этого утверждения проводится следующим образом. Рассмотрим в Ω некоторую всюду плотную траекторию. На ней определена групповая операция: $p_{t_1} \cdot p_{t_2} = p_{t_1+t_2}$. Эту групповую операцию можно продолжить на все Ω.

Очевидно, что верно и обратное утверждение, т. е. всякая динамическая система, гомеоморфная канонической, компактна и устойчива по Ляпунову. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы динамическая система была гомеоморфна канонической, необходимо и достаточно, чтобы она была компактной, строго эргодической и устойчивой по Ляпунову.*

Отсюда легко вытекает, что *любая* (не строго эргодическая) *компактная устойчивая по Ляпунову система представляет собой объединение конечного или бесконечного числа канонических систем.*

Так как на канонической динамической системе все собственные функции непрерывны, то из теоремы 2 следует существование полной системы непрерывных собственных функций на каждой компактной строго эргодической динамической системе, устойчивой по Ляпунову.

4. Определение 2. Динамическая система Ω называется устойчивой в среднем по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $r(p, q) < \delta$ неравенство $r(S_t p, S_t q) < \varepsilon$ выполняется для всех $t, -\infty < t < \infty$, за исключением, может быть, некоторого множества, верхняя плотность которого меньше ε.

Приведенный выше пример (см. рис. 1) представляет собой динамическую систему, не являющуюся устойчивой по Ляпунову в среднем. Ясно, что всякая система, устойчивая по Ляпунову в обычном смысле, устойчива в среднем по Ляпунову, но, вообще говоря, не наоборот.

Теорема 3. *Пусть Ω — компактная строго эргодическая динамическая система с чисто точечным спектром, устойчивая по Ляпунову в среднем. Тогда на Ω существует полная система непрерывных собственных функций.*

Для доказательства теоремы рассмотрим выражение

$$\varphi_\lambda(p) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(S_t p)\, e^{-i\lambda t}\, dt, \tag{1}$$

где $f(p)$ — некоторая непрерывная функция на Ω. По теореме Биркгофа, предел (1) существует для почти всех p. Нетрудно проверить, что или $\varphi_\lambda(p) \equiv 0$ или $\varphi_\lambda(p)$ — собственная функция, соответствующая собственному значению λ, причем все отличные от нуля $\varphi_\lambda(p)$ образуют полную систему собственных функций на Ω. Из устойчивости по Ляпунову в среднем вытекает, что предел существует для всех p без исключения и что все $\varphi_\lambda(p)$ непрерывны.

Отсюда и из теоремы 1 непосредственно вытекает:

Следствие. *Всякая динамическая система, удовлетворяющая условиям теоремы* 3, *может быть непрерывно отображена на каноническую динамическую систему с тем же спектром.*

Как показал А. А. Марков (см., например ([3]), стр. 433—440), существуют минимальные множества, не являющиеся строго эргодическими системами. Однако для динамических систем, устойчивых по Ляпунову в среднем, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Минимальное множество, устойчивое по Ляпунову в среднем, является строго эргодической системой.*

Как показывают теоремы 3 и 4, устойчивые по Ляпунову в среднем динамические системы обладают довольно простыми свойствами. Представляется правдоподобным, что устойчивыми в среднем системами исчерпываются, в некотором смысле, все компактные строго эргодические системы с чисто точечным спектром. Точнее говоря, повидимому, справедлива следующая гипотеза.

Каждая компактная строго эргодическая динамическая система с чисто точечным спектром содержит инвариантное подмножество полной меры, устойчивое по Ляпунову в среднем.

5. Применим полученные выше результаты к исследованию траекторий на торе. Известна следующая теорема Данжуа: пусть траектории на поверхности тора определяются уравнением

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{2}$$

где $f(x, y+1) = f(x+1) = f(x, y)$ и $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Тогда, если среди траекторий нет ни одной периодической, то каждая траектория является всюду плотной.

Эта теорема может быть усилена следующим предложением.

Теорема 5. *Если каждая из траекторий, определяемых на торе уравнением* (2), *всюду плотна, то эта динамическая система гомеоморфна канонической динамической системе на торе, т. е. системе, определяемой уравнением*

$$\frac{dy}{dx} = \mu = \text{const}$$

при некотором иррациональном μ.

Доказательство этого утверждения может быть получено следующим образом: прежде всего устанавливается, что динамическая система, определяемая уравнением (2), может быть гомеоморфно отображена на себя так, что одна наперед заданная траектория переходит в другую наперед заданную траекторию (однородность в смысле Биркгофа). Далее нетрудно показать, что это свойство влечет за собой устойчивость системы по Ляпунову. Теперь теорема 5 непосредственно вытекает из теорем 4 и 2.

Физический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. v. Neumann, Ann. of Math., **33**, 587 (1932). [2] P. R. Halmos and J. v. Neumann, ibid., **43**, 332 (1942). [3] В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М., 1948.