Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

И. М. РАПОПОРТ

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 2 I 1951)

Мы рассматриваем в этой статье вопрос об устойчивости колебаний, определяемых системой n дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda^2 P(t) z = 0, \quad P(t+T) = P(t), \tag{1}$$

где $P(t)$ — симметрическая матрица с положительными и различными числами во всем интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Относительно элементов матрицы $P(t)$ предполагаем, что они непрерывны вместе с их первыми производными и имеют суммируемые в интервале $(0, T)$ вторые производные.

Фундаментальное исследование общей задачи об устойчивости движения проведено А. М. Ляпуновым ([1]). Ряд результатов, непосредственно относящихся к уравнениям (1), недавно опубликован М. Г. Крейном ([2]). В этой статье мы выводим асимптотические формулы, непосредственно определяющие границы зон устойчивости и неустойчивости и эффективные в области больших значений параметра λ. Случай скалярного уравнения (1) $(n = 1)$ был уже рассмотрен нами ([3]), однако метод исследования характеристического уравнения, которым мы пользовались в статье ([3]), применительно к общему случаю векторного уравнения (1) оказался весьма громоздким, и мы вынуждены были от него отказаться.

Вместо уравнений (1) рассмотрим эквивалентную им систему $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda A(t) x, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -P & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

и, следуя алгоритму, указанному в ([4]), положим в уравнениях (2)

$$x = \left[B_0(t) + \frac{1}{\lambda} B_1(t) \right] y, \tag{3}$$

где $B_0(t)$ и $B_1(t)$ — матрицы, определяемые уравнениями

$$B_0 W_0 - A B_0 = 0, \quad B_1 W_0 - A B_1 = -B_0 W_1 - dB_0 / dt, \tag{4}$$

в которых матрицы $W_0(t)$ и $W_1(t)$ должны быть диагональными.

Подстановка (3) преобразует уравнения (2) к виду:

$$\frac{dy}{dt} - \lambda W(t) y = \varepsilon C(t) y, \quad W = W_0 + \frac{1}{\lambda} W_1,$$
$$C = -\left(B_0 + \frac{1}{\lambda} B_1 \right)^{-1} \left(\frac{dB_1}{dt} + B_1 W_1 \right), \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda}. \tag{5}$$

Построив решение системы дифференциальных уравнений (5) в форме ряда, расположенного по степеням ε, найдем:

$$y(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m S_m(t)\,y(0),\qquad S_m(t)=\int_0^t S_0(t)\,S_0^{-1}(\tau)\,C(\tau)\,S_{m-1}(\tau)\,d\tau,\ m=1,2,\ldots,\tag{6}$$

$$S_0^{\cdot}(t)=\lambda W(t)\,S_0(t),\qquad S_0(0)=I.\tag{7}$$

Полагая во втором из уравнений (4) $B_1=B_0G_0$, получим для матрицы $G_0(t)$ уравнение $W_0G_0-G_0W_0=W_1+C_0$, где $C_0(t)=B_0^{-1}(t)\,B_0'(t)$. При этом, согласно (5), для матрицы $C(t)$ получим соотношение $C=-G_0W_1-C_1G_0-dG_0/dt+O(1/\lambda)$, или

$$C=-G_0W_1-C_0G_0-dG/dt+O(1/\lambda),\tag{8}$$

где $G(t)$ — матрица, определяемая уравнением $WG-GW=W_1+C_0$. Заметим далее, что $\int\limits_0^T S_0^{-1}(\tau)\,X(\tau)\,S_0(\tau)\,d\tau=O(1/\lambda)$, если диагональные элементы матрицы $X(t)$ тождественно равны нулю, а остальные элементы имеют производные, суммируемые в интервале $(0,T)$. Таким образом, согласно (8),

$$\int_0^T S_0^{-1}(\tau)\,C(\tau)\,S_0(\tau)\,d\tau=\int_0^T W_2(\tau)\,d\tau-\int_0^T S_0^{-1}(\tau)\,G'(\tau)\,S_0(\tau)\,d\tau+O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\tag{9}$$

где $W_2(t)$ — диагональная матрица, элементы которой равны соответствующим диагональным элементам матрицы $-G_0W_1-C_0G_0$.

Итак, согласно (6) и (9), вектор $y(T)$ может быть представлен в виде ряда:

$$y(T)=\Theta(\lambda)\left[I+\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^{s+1}H_s(\lambda)\right]y(0),\qquad \varepsilon=\frac{1}{\lambda},\tag{10}$$

где $\Theta(\lambda)=S_0(T)$, а $H_s(\lambda)$ — матрицы, элементы которых остаются ограниченными, когда $\lambda\to\infty$, в частности, $H_0(\lambda)$ — матрица, элементы которой $h_{ij}^0(\lambda)$ соответственно равны:

$$h_{ij}^0(\lambda)=\int_0^T \exp\lambda\int_0^t[w_j(\tau)-w_i(\tau)]\,d\tau\,d\,\frac{c_{ij}^0(t)}{w_j(t)-w_i(t)},\qquad j\neq i,$$
$$h_{ii}^0(\lambda)=\sum_{j\neq i}\int_0^T\frac{c_{ij}^0(t)\,c_{ji}^0(t)}{w_i^0(t)-w_j^0(t)}\,dt,\tag{11}$$

где w_i^0, w_i и c_{ij}^0 — элементы матриц W_0, W и C_0 $(w_i=w_i^0-c_{ii}^0/\lambda)$.

Обозначим через $\omega_1^2, \omega_2^2,\ldots,\omega_n^2$ собственные числа матрицы P и через $q_{1j}, q_{2j},\ldots,q_{nj}$ — составляющие собственного вектора этой матрицы, соответствующего собственному числу ω_j^2. Будем в дальнейшем предполагать выполненными условия нормирования: $\sum\limits_{i=1}^{n}q_{ij}^2=1$, $j=1,2,\ldots,n$. Если через Q обозначить матрицу с элементами q_{ij} и через Ω — диагональную матрицу с элементами ω_i, то $PQ=Q\Omega^2$, и для матриц W_0 и B_0, определяемых первым из уравнений (4), и матрицы B_0^{-1} мы получим формулы:

$$W_0 = \begin{pmatrix} i\Omega & 0 \\ 0 & -i\Omega \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} Q & Q \\ iQ\Omega & -iQ\Omega \end{pmatrix}, \quad B_0^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q^{-1} & -i\Omega^{-1}Q^{-1} \\ Q^{-1} & i\Omega^{-1}Q^{-1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда, учитывая то, что матрицы Q и Q^{-1} взаимно транспонированные в силу симметричности матрицы P, получим следующие формулы для элементов $c_{ij}^0(t)$ матрицы $C_0(t) = B_0^{-1}(t)\,B_0'(t)$:

$$\begin{aligned} c_{i+n,\,j+n}^0 &= c_{ij}^0 = \frac{\omega_i + \omega_j}{2\omega_i}\sum_{s=1}^{n} q_{si}\frac{dq_{sj}}{dt}, \quad j \neq i, \quad c_{i+n,\,i+n}^0 = c_{i,\,i}^0 = \frac{1}{2\omega_i}\frac{d\omega_i}{dt}, \\ c_{i+n,\,j}^0 &= c_{i,\,j+n}^0 = \frac{\omega_i - \omega_j}{2\omega_i}\sum_{s=1}^{n} q_{si}\frac{dq_{sj}}{dt}\; j \neq i, \quad c_{i+n,i}^0 = c_{i,i+n}^0 = -\frac{1}{2\omega_i}\frac{d\omega_i}{dt}; \\ & i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{12}$$

Согласно (12), $\int_0^T c_{ii}^0(t)\,dt = 0$, следовательно, $\int_0^T w_i(t)\,dt = \int_0^T w_i^0(t)\,dt$; мы получим из (7) для элементов $\vartheta_k(\lambda)$ матрицы $\Theta(\lambda) = S_0(T)$:

$$\vartheta_k(\lambda) = e^{i\lambda\varphi_k}, \quad \varphi_j = \int_0^T \omega_j(t)\,dt, \quad \varphi_{j+n} = -\int_0^T \omega_j(t)\,dt, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Следуя А. М. Ляпунову [1], будем искать те значения вектора $y(0)$, для которых $y(T) = \rho y(0)$. Согласно (10) вектор $y(0)$ может быть отличен от нуля лишь тогда, когда ρ удовлетворяет уравнению:

$$\det\left[I - \rho\Theta^{-1}(\lambda) + \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^{s+1}H_s(\lambda)\right] = 0. \tag{14}$$

Так как система дифференциальных уравнений (2) — каноническая с вещественными коэффициентами, характеристическое уравнение (14) также будет иметь вещественные коэффициенты и будет возвратным [1]. Следовательно, если уравнение (14) имеет корень $re^{i\varphi}$, то оно имеет также и корень $r^{-1}e^{i\varphi}$. Таким образом, если данное значение параметра λ определяет границу какой-либо зоны неустойчивости, уравнение (14) при этом значении λ должно иметь кратный корень. Если в уравнении (14) пренебречь слагаемыми, содержащими ε, то полученное алгебраическое уравнение будет иметь кратные корни лишь в том случае, если для какой-либо пары индексов k и l $\vartheta_k(\lambda) = \vartheta_l(\lambda)$, т. е., согласно (13), при $\lambda = 2\pi m(\varphi_k - \varphi_l)^{-1}$. Будем для простоты предполагать, что при этом корень уравнения $\rho = e^{i\lambda\varphi_k}$ имеет кратность, равную двум, и рассмотрим поведение корней характеристического уравнения (14) в окрестности указанного значения параметра λ (рассмотрение общего случая произвольной кратности корня $\rho = e^{i\lambda\varphi_k}$ не встречает затруднений). Полагая в уравнении (14)

$$\lambda = (\varphi_k - \varphi_l)^{-1}(2\pi m + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \ldots), \tag{15}$$

будем искать решение уравнения (14) в виде

$$\rho = \exp\frac{i}{2}(2\lambda\varphi_k + \beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2 + \ldots). \tag{16}$$

Подставляя (15) и (16) в уравнение (14), получим ряд, расположенный по степеням ε и начинающийся с члена, пропорционального ε^2. Приравнивая нулю коэффициенты при $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots$ в этом разложении, получим уравнения, первое из которых имеет вид:

$$(\beta_1 + \alpha_1 + ih_{kk}^{0*} + ih_{ll}^{0*})^2 = (\alpha_1 + ih_{ll}^{0*} - ih_{kk}^{0*})^2 - 4h_{kl}^{0*}h_{lk}^{0*} \tag{17}$$

и определяет два значения коэффициента β_1, а дальнейшие уравнения последовательно определяют коэффициенты $\beta_2, \beta_3, \ldots$ (звездочки в (17) означают замену аргумента λ значением $2\pi m(\varphi_k - \varphi_l)^{-1}$). Таким образом найдем две последовательности коэффициентов $\beta_1', \beta_2', \ldots$ и $\beta_1'', \beta_2'', \ldots$, которым, согласно (16), будут соответствовать два корня ρ' и ρ'' характеристического уравнения (14). Рассмотрим отдельно два случая:

а) $1 \leqslant k \leqslant n$, $n+1 \leqslant l \leqslant 2n$. При $\lambda = 2\pi m(\varphi_k - \varphi_l)^{-1}$, $l - n \neq k$, из формул (11) и (12) после интегрирования по частям найдем:

$$h_{lk}^0 = -\lambda \sqrt{\frac{\omega_k(0)}{\omega_{l-n}(0)}} \int\limits_0^T \exp i\lambda \int\limits_0^t [\omega_k(\tau) + \omega_{l-n}(\tau)]\, d\tau \times$$

$$\times \frac{\omega_{l-n}(t) - \omega_k(t)}{2\sqrt{\omega_{l-n}(t)\,\omega_k(t)}} \sum_{s=1}^{n} q_{s,\, l-n}(t)\, dq_{sk}(t) = \frac{\omega_k(0)}{\omega_{l-n}(0)}\, \overline{h_{kl}^0},$$

так как $\sum\limits_{s=1}^{n} q_{s,\, l-n}\, q_{sk} = 0$ при $l - n \neq k$ в силу симметричности матрицы P. Равенство $h_{k+n,\, k}^0 = \overline{h_{k,\, n+k}^0}$ непосредственно следует из формул (11) и (12). Таким образом, в случае а) произведение $h_{kl}^{0*}\, h_{lk}^{0*}$ вещественно и неотрицательно. В то же время числа h_{ll}^{0*} и h_{kk}^{0*}, как видно из (11), чисто мнимые. Вводя обозначения:

$$\alpha_1', \alpha_1'' = ih_{kk}^{0*} - ih_{ll}^{0*} \mp 2\sqrt{h_{kl}^{0*}\, h_{lk}^{0*}}, \tag{18}$$

найдем, что при $\alpha_1 = \alpha_1'$ и $\alpha_1 = \alpha_1''$ уравнение (17) для коэффициента β_1 имеет кратный корень, и в этих двух случаях, согласно (16), разность между рассматриваемыми корнями ρ' и ρ'' уравнения (14) имеет порядок ε^2. Аналогичным путем для коэффициента α_2 в формуле (15) найдем такие два значения α_2' и α_2'', что при $\alpha_1 = \alpha_1'$, $\alpha_2 = \alpha_2'$ и $\alpha_1 = \alpha_1''$, $\alpha_2 = \alpha_2''$ $\rho' - \rho'' = O(\varepsilon^3)$, и т. д. В результате, полагая в (15) $\varepsilon = \lambda^{-1}$, получим асимптотические разложения для границ λ_m' и λ_m'' рассматриваемой зоны неустойчивости. В частности,

$$\lambda_m', \lambda_m'' = \frac{2\pi m}{\varphi_k - \varphi_l} + \frac{1}{2\pi m}\left(ih_{kk}^{0*} - ih_{ll}^{0*} \mp 2\sqrt{h_{kl}^{0*}\, h_{lk}^{0*}}\right) + O\left(\frac{1}{m^2}\right). \tag{19}$$

б) $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant n$, либо $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$, $n+1 \leqslant l \leqslant 2n$. В этом случае произведение $h_{kl}^{0*}\, h_{lk}^{0*}$ вещественно и неположительно, уравнение (17) для β_1 может иметь лишь вещественные корни, причем возникновение кратного корня возможно лишь при $h_{kl}^{0*}\, h_{lk}^{0*} = 0$. Можно показать, что и последующие коэффициенты $\beta_2, \beta_3, \ldots$ в разложении (16) могут приобретать лишь вещественные значения. Невозможность возникновения зон неустойчивости в случае б) непосредственно следует из результатов М. Г. Крейна ([2]).

Итак, зоны неустойчивости образуют $\frac{n(n+1)}{2}$ серий, в каждой из которых границы зон определяются асимптотической формулой (19) (перестановка индексов k и l в (19) эквивалентна замене m на $-m$; если же положить в (19) $l = j + n$, то перестановка индексов j и k не изменит формулы (19)).

Поступило
21 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1935.
[2] М. Г. Крейн, ДАН, 73, № 3 (1950). [3] И. М. Рапопорт, ДАН, 76, № 6 (1951).
[4] И. М. Рапопорт, ДАН, 73, № 6 (1950).