Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

Г. Я. ПОПЛАВСКАЯ

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ПЛОЩАДИ НЕПРЕРЫВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ $t=f(x, y)$

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 XII 1950)

Существует ряд определений площади двумерной поверхности. Наиболее принятыми являются определения: Лебега ([1]), Гёце ([1]), Пеано ([2]), Каратеодори ([3]), Хаусдорфа ([4]). В общем случае параметрически заданной поверхности эти определения неэквивалентны ([5]).

В настоящей заметке рассматривается класс униформных поверхностей — графиков непрерывных функций, заданных на единичном квадрате I. Для таких поверхностей все перечисленные выше определения площади оказываются эквивалентными. Более того, оказывается, что для B-множества M, лежащего на униформной непрерывной поверхности $t=f(x, y)$ ограниченной площади,

$$\Pi_f(M)=\mu_C(M)=\mu_H(M),$$

где $\Pi_f(M)$ — поверхностная мера множества M ([6]), $\mu_C(M)$ — его мера Каратеодори ([3]), $\mu_H(M)$ — мера Хаусдорфа ([4]).

Пусть $\alpha \in S$ — точка непрерывной поверхности S и T_r — открытый шар радиуса r с центром в точке α. Если $\Pi_f(T_r \cap S)/\pi r^2 \to 0$ при $r\to 0$, то α назовем конической точкой поверхности, в противном случае — обыкновенной.

1°. *Компонента* K_α *уровня* ([7]) *для конической точки* α *состоит из точки пр.* α (где пр. α — проекция точки α на плоскость xy).

Допустим обратное, т. е. что компонента K_α множества уровня, содержащая точку пр. α, содержит некоторый нетривиальный континуум L диаметра $d>0$. Опишем вокруг точки α открытый шар T_r столь малого радиуса $r<d/2$, что $\Pi_f(T_r\cap S)/\pi r^2<1/32\pi$. Пусть $T_{r/2}$ — открытый шар радиуса $r/2$ с центром в α и K_α^S — компонента пересечения L^S (образ L на поверхности S) с шаром $T_{r/2}$, содержащая точку α. K_α^S содержит предельную точку β на границе шара $T_{r/2}$. Рассекая $T_{r/2}$ плоскостями P, перпендикулярными направлению $\alpha\beta$, в пересечении плоскостей с T_r и $T_{r/2}$ получим круги; внутри меньшего из них и на границе внешнего находятся точки простых дуг пересечения S с плоскостями P, поэтому диаметр каждой дуги $\geqslant r/2$. Так как расстояние между крайними секущими плоскостями равно $r/2$, то $\Pi_f(T_r\cap S)\geqslant r^2/32$ и $\Pi_f(T_r\cap S)/\pi r^2\geqslant 1/32\pi$, что и доказывает свойство 1°.

2°. *Пусть* ξ — *фиксированная точка поверхности* S *и* $\alpha\neq\xi$ — *коническая точка уровня* t. *Пусть* $\delta>0$ *доста-*

точно мало и $d(\alpha, \delta)$ — диаметр ближайшей к пр.α компоненты суммы уровней $t+\delta$, $t-\delta$, отделяющей пр. α от пр. ξ [7]. Тогда при $\delta \to 0$ $d(\alpha, \delta)/\delta \to 0$.

Так как α — коническая точка, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется $r_0(\varepsilon) > 0$ такое, что при $r < r_0$

$$\Pi_f(T_r \cap S)/\pi r^2 < \varepsilon. \tag{1}$$

Рассмотрим ближайшую к пр.α компоненту R множества уровня, отличающегося от уровня $t_0 = f(\alpha)$ меньше, чем на $r_0/10$, отделяющую пр.α от пр.ξ, имеющую диаметр d $(0 < d < r_0/10)$ и образ которой R^s лежит внутри шара T_0 радиуса r_0 с центром в α. Пусть ее уровень отличается от уровня точки α на δ. Положим $A = \delta/d$. Пусть β — точка R^s, отстоящая от α на максимальное расстояние. Тогда расстояние $\rho(\alpha, \beta) < d\sqrt{1+A^2}$. Возьмем шар T_r с центром в α радиуса $r = 2d\sqrt{1+A^2}$. Так как $r < r_0$, то имеет место (1). С другой стороны, рассекая поверхность S плоскостями, перпендикулярными отрезку, соединяющему точки R^s, отстоящие на расстояние d, мы получим в пересечении с S простые дуги диаметра $\geqslant d\sqrt{1+A^2}$, поэтому $\Pi_f(T_r \cap S) > d^2\sqrt{1+A^2}/8$. Следовательно, $\varepsilon > 1/32\pi\sqrt{1+A^2}$, откуда $A > \sqrt{1/1024\pi^2\varepsilon^2 - 1}$, т. е. при $\varepsilon \to 0$ $A \to \infty$.

Лемма 1. *Если M' — подмножество обыкновенных точек множества M, лежащего на непрерывной поверхности $t = f(x, y)$ конечной лебеговой площади, и* $\Pi_f(M) = 0$, *то* $\mu_H(M') = 0$.

Доказательство. Без ограничения общности M можно считать множеством типа G_δ. Допустим, что, вопреки предположению, $\mu_H(M') > b > 0$. Так как α — обыкновенная точка S, то $\overline{\lim\limits_{r\to 0}}\, \Pi_f(T_r \cap S)/\pi r^2 = \tau(\alpha) > 0$.

Разобьем M' на множества M_n' $(n = 1, 2, \ldots)$, относя к M_n' те точки $\alpha \in M'$, в которых $\tau(\alpha) \geqslant 1/n$. Можно доказать, что множества M_n' суть B-множества. В частности, множество конических точек — также B-множество. Поэтому найдется номер n, для которого $\mu_H(M_n') > b$. Пусть $M^* \in M'$ — замкнутое множество с $\mu_H(M^*) > b$. Существует такое ε_0, что для любого покрытия M^* системой шаров Q_i диаметра $< \varepsilon_0$ $\sum\limits_i d^2 Q_i > b$, где $d^2 Q_i$ — площадь большого круга шара Q_i. Так как $\Pi_f(M^*) = 0$, то пр.M^* можно заключить в открытое множество G с $\Pi_f(G^s) < b/9n$. Каждую точку $\alpha \in M^*$ покроем шаром T_i с центром в α диаметра $< \varepsilon_0/10$ таким, чтобы проекции шара принадлежали G и $\Pi_f(T_i \cap S)/\pi r^2 > 1/n$. Рассмотрим конечное подпокрытие M^*: $T_1, \ldots, T_N$, тогда $\sum\limits_{i=1}^{N} d^2 T_i > b$. Из покрытия T_i $(i = 1, \ldots, N)$ выберем шары так: за $T^{(1)}$ примем максимальный из шаров; отбросим все шары, пересекающиеся с $T^{(1)}$, за $T^{(2)}$ примем максимальный из оставшихся, и т. д. Пусть шары $T_p^{(1)}, \ldots, T_p^{(k)}$ концентричны с шарами $T^{(i)}$ и втрое большего радиуса, чем радиусы $T^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, k)$, они покроют все множество M^* и $\sum\limits_i d^2 T_p^{(i)} > b$. Поэтому $\sum\limits_{i=1}^{k} d^2 T^{(i)} > b/9$ и $\Pi_f(G^s) \geqslant \frac{1}{n} \sum\limits_i d^2 T^{(i)} > b/9n$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. *Если M — B-множество, состоящее из конических точек непрерывной поверхности $t = f(x, y)$ конечной лебеговой площади, и* $\Pi_f(M) = 0$, *то* $\mu_H(M) = 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in M$. Рассмотрим функцию Φ (пр.α, δ) $= d(\alpha, \delta)/\delta$ (см. 2°). Φ (пр. α, δ) $\to 0$ при $\delta \to 0$. Пусть $M(\rho)$ — множество тех точек из M, для которых Φ (пр. α, δ) $< 1/20$ при $\delta < \rho$. Можно показать, что множество $M(\rho)$ измеримо B.

Пусть лемма 2 неверна, тогда существуют такие $b > 0$ и $\rho_0 > 0$, что $\mu_H[M(\rho_0)] > b > 0$.

Пусть A и B — минимум и максимум функции $f(x, y)$ на квадрате I. Разобьем I на лебеговы множества $E_1\left\{f(x, y) > \frac{A+B}{2}\right\}$ и $E_2\left\{f(x, y) \leqslant \leqslant \frac{A+B}{2}\right\}$. Тогда либо $\mu_H[M(\rho_0) \cap E_1] > b/2$, либо $\mu_H[M(\rho_0) \cap E_2] > b/2$. Пусть, для определенности, имеет место первое неравенство. Пусть ξ — одна из точек минимума $f(x, y)$ и $r_\xi > 0$ таково, что в круге O(пр. ξ) радиуса r_ξ с центром в пр.ξ $f(\eta) < A + 1/4(B + A)$.

Рассмотрим $M^*(\rho_0) \subset M(\rho_0) \cap E_1$—замкнутое множество с $\mu_H[M^*(\rho_0)] > b/2$ и $\varepsilon > 0$ такое, что $\mu_H^\varepsilon[M^*(\rho_0)] > b/2$; μ_H^ε — ε-приближение меры Хаусдорфа. Заключим пр. $M^*(\rho_0)$ в открытое множество G такое, что $\Pi_f(G^s) < b/200\pi$. Пусть расстояние от пр. $M^*(\rho_0)$ до CG равно τ. Ясно, что $\tau > 0$. Разделим отрезок оси t от $1/2(A + B)$ до B на $3m$ равных отрезков длины l точками $t_0, t_1, \ldots, t_{3m}$, причем

$$l < \min\left(\frac{\rho_0}{10}, \frac{\tau}{10}, \frac{\varepsilon}{10}, r_\xi\right). \tag{2}$$

Проведя через точки деления горизонтальные плоскости и обозначив через M_s часть $M^*(\rho_0)$, попавшую в s-й слой $\underset{t}{E}\{t_{s-1} \leqslant f \leqslant t_s\}$, получим, что $\mu_H[M^*(\rho_0)] = \sum_{s=1}^{3m} \mu_H(M_s) > b/2$. Нумеруя слои от 1 до $3m$ и соответственно с этим рассматривая множества $M_{\text{I}} = M_1 + M_2 + \ldots$, $M_{\text{II}} = M_2 + \ldots$, $M_{\text{III}} = M_3 + M_6 + \ldots$, для одного из них (пусть для M_{II}) мы имеем: $\mu_H(M_{\text{II}}) > b/6$. Рассмотрим s-й слой, принадлежащий M_{II}, и точку $\alpha \in M_1$. Пусть уровни $t_s + t$, $t_{s-1} - t$ $(t > l)$ — уровни соседних с s-м слоев. В силу свойства 2° и условия (2) для каждой точки $\alpha \in M_s$ на одном из уровней $t_s + t$ или $t_{s-1} - t$ найдется ближайшая к пр. α компонента, отделяющая пр. α от пр. ξ и целиком лежащая в G. Такую компоненту назовем отмеченной.

Все точки, отделяемые от точки пр. ξ отмеченной компонентой K, находятся от K на расстоянии $\leqslant d$.

Действительно, поскольку уровень компоненты K не пересекается с O(пр. ξ), расстояния ρ (пр. ξ, K) $> d$, откуда следует, что ρ (пр. α, K) $\leqslant d$.

Обозначим через $\nu_s(t)$ сумму длин отмеченных компонент уровней $t_s + t$ и $t_{s-1} - t$, отделяющих каждую точку пр. $\alpha \subset$ пр. M_s от пр. ξ.

Положим $\chi(t) = \sum_{s=2,5}^{3m-1} \nu_s(t)$, тогда $\chi(t) \leqslant \sum_{s=2,5,\ldots}^{3m-1} \nu\left[(E_{t_s+t} + E_{t_{s-1}-t}) \cap G\right]$, где $\nu(E \cap G)$ — линейная мера Хаусдорфа множества $E \cap G$. Плоская вариация $W(f, G)$ функции f на G удовлетворяет неравенству [7] $1/2 W(f, G) = 1/2 \int \nu(E_\tau \cap G)\, d\tau < \Pi_f(G^s)$, где интеграл взят по всей длине отрезка оси t, соответствующего значениям функции.

Положим $\inf_t \sum_{s=2,5,\ldots}^{3m-1} \nu\left[(E_{t_s+t} + E_{t_{s-1}-t}) \cap G\right] = L$. Это значит, что при некотором $t = t_0$ $\sum_s \nu\left[(E_{t_s+t_0} + E_{t_{s-1}-t_0}) \cap G\right] \leqslant 2L$, т. е. и сумма по $s = 2, 5, \ldots, 3m-1$ диаметров отмеченных компонент уровней $t_s + t_0$, $t_{s-1} - t_0$, отделяющих пр. $\alpha \in$ пр. M_{II} от пр. ξ, также $\leqslant 2L$.

Рассмотрим круговые цилиндры высоты l с основаниями — кругами диаметра $6d$, где d — диаметр ближайшей к пр.α компоненты уровней

$t_s + t_0$, $t_{s-1} - t_0$, отделяющей пр. α от пр. ξ. Ось цилиндра проходит через точку α параллельно оси t, а центр лежит в середине s-го слоя. В силу того, что для точек пр. α, отделяемых отмеченной компонентой K от пр. ξ, имеет место ρ(пр. α, $K) < d$, мы получим покрытие множества M_{II} системой цилиндров. Каждый из цилиндров покроем шарами T_i следующим образом: рассечем цилиндр на цилиндры высоты $6d$ каждый, кроме, может быть, последнего ($6d < l$ в силу свойства 2° и $d / \delta < 1/20$), и опишем вокруг них шары радиуса $3d\sqrt{2}$. Таких шаров будет N: $N \leqslant [l / 6d] + 1 < 2 [l / 6d] \leqslant l / 3d$. Сумма площадей их сечений $d^2 T_i$ для одного цилиндра будет $\leqslant 6\pi dl$, а суммируя площади сечений по всем цилиндрам, получим $\sum\limits_i d^2 T_i \leqslant 12\pi lL$. Так как диаметры шаров в силу (2) не превышают ε, то $\mu_H^{(\varepsilon)}(M_{\text{II}}) \geqslant b / 6$, откуда следует, что $12\pi lL \geqslant b / 6$, и $L \geqslant b / 72\pi l$. Поэтому $W(f, G) \geqslant \int\limits_0^l L\,dt \geqslant b / 72\pi$, следовательно, $\Pi_f(G^s) \geqslant b / 144\pi$. Мы пришли к противоречию, чем лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 следует основная лемма.

Основная лемма. *Если M — множество на непрерывной поверхности $t = f(x, y)$ конечной лебеговой площади и $\Pi_f(M) = 0$, то $\mu_C(M) = \mu_H(M) = 0$.*

С помощью теоремы И. Я. Верченко [8] и теорем А. Н. Колмогорова [9] и Небелинга [10] из основной леммы легко следует теорема 1.

Теорема 1. *Пусть $t = f(x, y)$ непрерывная поверхность конечной лебеговой площади и M — B-множество на ней.*

Тогда

$$\Pi_f(M) = \mu_C(M) = \mu_H(M).$$

Легко показать, что для непрерывной поверхности $t = f(x, y)$ из $\mu_H(S) < +\infty$ следует $\Pi_f(S) < +\infty$. Из этого обстоятельства и теоремы 1 для случая $M = S$ получается теорема 2.

Теорема 2. *Пусть S — непрерывная поверхность. Тогда*

$$\Pi_f(S) = \mu_C(S) = \mu_H(S).$$

Если вспомнить доказанное Радо [2] совпадение площадей по Гёце и Лебегу для непрерывных поверхностей $t = f(x, y)$ и доказанное И. Я. Верченко [8] для этого случая совпадение лебеговой площади поверхности с площадью по Пеано, то из сказанного выше следует эквивалентность площадей непрерывной поверхности $t = f(x, y)$ по Лебегу, Гёце, Пеано, Каратеодори и Хаусдорфу.

Поступило
5 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Сакс, Теория интеграла, 1949. [2] T. Rado, Math. Ann., **100** (1928). [3] C. Carathéodory, Göttinger Nachrichten (1914). [4] F. Haussdorf, Math. Ann., **79** (1919). [5] G. Nöbeling, ibid., **118** (1943). [6] И. Я. Верченко, Матем. сборн., **10**, 1—2 (1942). [7] А. С. Кронрод, Усп. матем. наук, **5**, в. 1 (1950). [8] И. Я. Верченко, там же, **5**, в. 2 (1950). [9] А. Н. Колмогоров, Math. Ann., **107** (1932). [10] G. Nöbeling, Math. Zs., **48** (1943).