Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

А. МАРКОВ

НЕВОЗМОЖНОСТЬ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ В ТЕОРИИ АССОЦИАТИВНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 4 I 1951)

1. При рассмотрении ассоциативных систем, определяемых конечными системами соотношений в данном алфавите A, естественно возникают следующие проблемы.

Проблема изоморфии. Указать алгоритм, посредством которого можно было бы для любых двух конечных систем соотношений в A узнавать, изоморфны ли определяемые ими ассоциативные системы.

Проблема единичности. Указать алгоритм, посредством которого можно было бы для любой конечной системы соотношений A узнавать, состоит ли определяемая ею ассоциативная система из одного единичного элемента.

Проблема распознавания групп. Указать алгоритм, посредством которого можно было бы для любой конечной системы соотношений в A узнавать, является ли группой определяемая ею ассоциативная система.

Проблема включаемости в группу. Указать алгоритм, посредством которого можно было бы для любой конечной системы соотношений в A узнавать, включаема ли в группу определяемая этой системой ассоциативная система.

Проблема распознавания полугруппы, формулировка которой получается из формулировки проблемы распознавания групп заменой слова «группой» словом «полугруппой».

Мета-проблема тождества. Указать алгоритм, посредством которого можно было бы для любой конечной системы соотношений в A узнавать, разрешима ли проблема тождества для ассоциативной системы, определяемой этой системой соотношений.

Решение проблемы изоморфии дало бы, разумеется, и решение проблемы единичности. Понятия группы, включаемости в группу и полугруппы хорошо известны ([3]). Что касается мета-проблемы тождества, то, как известно ([1], [2], [4]), существуют рассматриваемого типа ассоциативные системы, для которых проблема тождества неразрешима. Естественно поэтому искать общий эффективный метод распознавания таких «плохих» ассоциативных систем по определяющим системам соотношений.

2. Нам удалось установить следующий результат.

Для всякого алфавита A, содержащего более трех букв, каждая из вышеперечисленных проблем неразрешима: искомый в этой проблеме алгоритм невозможен.

Понятие алгоритма применяется здесь в том же смысле, как в наших предыдущих заметках ([1,2]).

Мы наметим здесь вкратце путь доказательства формулированного результата.

3. Будем исходить из указанной в ([2]) системы соотношений C_5 в алфавите A_5, определяющей ассоциативную систему с неразрешимой проблемой тождества. Эта ассоциативная система не является полугруппой, так как соотношение $h \longleftrightarrow f$, очевидно, не следует из C_5, тогда как $dh \longleftrightarrow df$ есть одно из соотношений C_5.

Сопоставляя буквам $a, b, \ldots, m$ алфавита A_5 слова $aba, abba, \ldots$ $\ldots, abbbbbbbbbbbbba$ в алфавите $A_0 = \{a, b\}$ и заменяя в C_5 каждую букву сопоставленным ей словом, получаем систему соотношений D в алфавите A_0. Принимая во внимание, что как левые, так и правые части соотношений C_5 непусты, легко убеждаемся в том, что для ассоциативной системы, определяемой системой D, проблема тождества также неразрешима и что эта ассоциативная система также не есть полугруппа*.

4. Пусть теперь G и H будут какие-нибудь два слова в A_0. Построим по ним систему соотношений $D_{G,H}$ в алфавите $Б = \{a, b, c, d\}$, присоединяя к D соотношения $cGd \longleftrightarrow 0$, $\xi cHd \longleftrightarrow cHd$ $(\xi = a, b, c, d)$.

Могут быть установлены следующие леммы.

Лемма 1. *Если соотношение*

$$G \longleftrightarrow H \tag{1}$$

следует из D, то ассоциативная система, определяемая системой соотношений $D_{G,H}$, состоит из одного единичного элемента.

Лемма 2. *Если соотношение* (1) *не следует из D, то для любых двух слов P и Q в алфавите A_0 соотношение $P \longleftrightarrow Q$ тогда и только тогда следует из $D_{G,H}$, когда оно следует из D.*

Из леммы 2 вытекает, что в случае, когда (1) не есть следствие из D, проблема тождества неразрешима для ассоциативной системы, определяемой $D_{G,H}$, и что тогда эта ассоциативная система не есть полугруппа. Следовательно, она тогда не включаема в группу, и, тем более, сама не является группой, а значит, состоит не только из единичного элемента.

В случае же, когда (1) есть следствие из D, ассоциативная система, определяемая $D_{G,H}$, состоящая лишь из единичного элемента, согласно лемме 1, есть группа, включаема в группу, есть полугруппа и имеет разрешимую проблему тождества.

Сопоставляя все это, мы видим, что решение для алфавита $Б$ какой-либо из пяти проблем: единичности, распознавания групп, распознавания включаемости в группу, распознавания полугруппы, метапроблемы тождества, влекло бы за собою решение проблемы тождества для ассоциативной системы, определяемой системой соотношений D в алфавите A_0. Решение это, однако, невозможно. Следовательно, эти проблемы неразрешимы для четырехбуквенного алфавита $Б$. В силу неразрешимости проблемы единичности для $Б$, проблема изоморфии также неразрешима для этого алфавита. Переход к произвольному алфавиту, содержащему не менее четырех букв, очевиден.

Поступило
4 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Марков, ДАН, 55, № 7 (1947). [2] А. Марков, ДАН, 58, № 3 (1947). [3] А. И. Мальцев, Матем. сборн., 6 (48) : 2 (1939); 8 (50) : 2 (1940). [4] E. L. Post, Journ. Symb. Logic, 12 : 1 (1947). [5] E. L. Post, Bull. Am. Math. Soc., 50, 284 (1944).

* Этот способ редукции к алфавиту из двух букв придуман Постом ([5]).