Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

Ю. В. ЛИННИК

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ, КАСАЮЩИЕСЯ БИНАРНЫХ ЗАДАЧ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 4 I 1951)

1. Бинарная задача Гольдбаха с простыми числами и задача «близнецов», как известно, приводятся к тому, чтобы показать, что интегралы:

$$I_1 = \int_0^1 S^2 e^{2\pi i\alpha N}\, d\alpha \quad \text{и} \quad I_2 = \int_0^1 |S|^2 e^{4\pi i\alpha}\, d\alpha, \tag{1}$$

где

$$S = \sum_{p>2} e^{-p/N} e^{-2\pi i\alpha p} \ln p,$$

ведут себя так, что $I_1 > 0$ при $N > N_0$, а $I_2 \to \infty$ при $N \to \infty$.

Этого до сих пор не удается сделать даже при привлечении весьма жестких аналитических гипотез, связанных с простыми числами. Оценку интегралов (1) пока не удается сделать на всем участке интегрирования $[0, 1]$.

Однако при привлечении указанных гипотез, более слабых гипотез и даже без всяких гипотез удается получить асимптотические выражения для наших интегралов и подобных им на «сравнительно длинных» сегментах, входящих в $[0, 1]$.

2. Обозначим $R[\zeta(s)]$ и $R[L(s, \chi)]$ римановы гипотезы для рядов, стоящих в квадратных скобках, а через D_q — «плотностную гипотезу» о нулях $L(s, \chi)$ с модулем q, имеющую следующий вид:

Пусть T такое число, что $q < e^{(\ln\ln T)^2}$; тогда существует какое-либо $c_0 > {}^1/_2$ такое, что:

1) совокупное число нулей всех $L(s, \chi)$ с модулем q в области $\sigma \geqslant {}^1/_2 + \nu \geqslant {}^1/_2$, ${}^1/_2 + \nu \leqslant c_0$, $|t| \leqslant T$, $s = \sigma + it$ не превосходит $\varphi(q)\, T^{1-2\nu} \ln^2 T$;

2) это же число нулей в области $1 - \frac{(\ln\ln T)^2}{\ln T} \geqslant \sigma \geqslant \frac{1}{2} + \nu$ при ${}^1/_2 + \nu > c_0$, $|t| \leqslant T$ не превосходит

$$\varphi(q)\, T^{1-2\nu} e^{-\sqrt{\ln\ln T}} q^{2\nu}. \tag{2}$$

В частности, при $q = 1$ $D_q = D_1$ есть плотностная гипотеза о нулях $\zeta(s)$.

3. Из этих гипотез следуют условные теоремы:

Теорема 1. *Из $R[\zeta(s)]$ следует, что при любом $\varepsilon > 0$, полагая $\varkappa_N = 1/(\ln N)^{3+\varepsilon}$, получим:*

$$\int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} S^2 e^{2\pi i\alpha N}\, d\alpha = \frac{N}{e} + O\left(\frac{N}{(\ln N)^{\varepsilon}}\right), \tag{3}$$

$$\int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} |S|^2 e^{4\pi i\alpha}\, d\alpha = \frac{N}{2} + O\left(\frac{N}{(\ln N)^{\varepsilon}}\right). \tag{4}$$

Заметим, что из (4) тривиально следует:

$$\int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} |S|^2\, d\alpha = \frac{N}{2} + O\left(\frac{N}{(\ln N)^{\varepsilon}}\right). \tag{5}$$

Для сравнения приведем тривиальный результат:

$$\int_0^1 |S|^2\, d\alpha \sim \frac{N}{2}\ln N.$$

Из (5) легко вывести, что неравенство

$$|p + p' - N| \leqslant (\ln N)^{3+2\varepsilon} \tag{6}$$

разрешимо в простых числах p и p', и можно построить асимптотическую формулу для числа его решений.

Теорема 2. *Пусть каждое число $\alpha \in [0, 1]$ апроксимируется непрерывной дробью:*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad q \leqslant \tau, \quad |\theta| \leqslant 1, \quad \tau \leqslant e^{(\ln\ln N)^3}.$$

Тогда имеем: из $R[L(s, \chi)]$ для всех $L(s, \chi)$ с модулем q следует:

$$\sum_{a=0}^{q-1} \int_{\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau}}^{\frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau}} |S|^2 d\alpha \ll \frac{N \ln^3 N}{\tau}. \tag{7}$$

4. Если заменить римановы гипотезы значительно более слабой и близкой к известным уже фактам гипотезой D_q, то получаются несущественно разнящиеся от теорем 1 и 2 утверждения.

Теорема 1'. *Из D_1 следует* (3), (4) *и* (5) *с заменой*

$$\varkappa_N = \frac{1}{(\ln N)^{3+\varepsilon}} \quad \text{на} \quad \varkappa'_N = \frac{1}{(\ln N)^{6+\varepsilon}}.$$

Теорема 2'. *Если для данного q справедлива плотностная гипотеза D_q, то* (7) *верно с заменой правой части*

$$\frac{N \ln^3 N}{q\tau} \quad \text{на} \quad \frac{N \ln^6 N}{q\tau}.$$

Наконец, без всяких гипотез получается результат:

Теорема 1″. *При* $\varkappa_N + \frac{1}{N^{0,13}}$ *имеем:*

$$\int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} |S|^2 \, d\alpha = \frac{N}{2} + O\left(\frac{N}{\ln N}\right). \tag{8}$$

Имеется и аналог теоремы 2.

5. Наметим сжатое доказательство (5) из теоремы 1.

Пусть

$$S_1 = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-n/N} e^{-2\pi i\alpha n} \lambda(n), \quad |\alpha| \leqslant \varkappa_N = \frac{1}{(\ln N)^{3+\varepsilon}}.$$

Тогда

$$\int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} |S|^2 \, d\alpha = I + O(N^{3/4} \ln^2 N),$$

где $I = \int\limits_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} |S_1|^2 \, d\alpha$. Полагая $x = \frac{1}{N} + 2\pi i\alpha$, получим (см. ([1]), § 4):

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{x} - \sum_{\rho_k} x^{-\rho_k} \Gamma(\rho_k) + O(\ln^3 N), \\ \overline{S_1} &= \frac{1}{\overline{x}} - \sum_{\rho_k} \overline{x^{-\rho_k} \Gamma(\rho_k)} + O(\ln^3 N), \end{aligned} \tag{9}$$

где ρ_k — критические нули $\zeta(s)$.

Принимаем $R[\zeta(s)]$, полагая $\rho_k = 1/2 + it_k$, тогда получим: при $\alpha > 0$

$$x^{-\rho_k} \Gamma(\rho_k) = -i\Gamma(\rho_k) e^{\frac{\pi}{2} t_k} e^{-\left(\frac{i}{2} + t_k\right) \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2\pi\alpha N}} \left(\sqrt{\frac{1}{N^2} + 4\pi^2\alpha^2}\right)^{-\frac{1}{2} + it_k}. \tag{10}$$

Замечаем далее, что при всяком T число точек t_k между T и $T+1$ будет $O(\ln|T| + 2)$.

Хорошо известная асимптотика $\Gamma(\rho_k)$ приводит к выводу, что члены (10), где $t_k < 0$ и $t_k > 2\pi\alpha N$, быстро убывают по модулю с увеличением $|t_k|$. Число «активных» колебательных членов (10) будет иметь порядок $\varkappa_N N = \frac{N}{(\ln N)^{3+\varepsilon}}$. На этом и основано доказательство.

Простые соображения об интегрировании элементарных функций, входящих в (10), приводят к оценке:

$$\int_0^{\varkappa_N} x^{-\rho_{k_1}} \Gamma(\rho_{k_1}) \overline{x^{-\rho_{k_2}} \Gamma(\rho_{k_2})} \, d\alpha \ll e^{\frac{|t_{k_1}| + |t_{k_2}|}{2\pi N \varkappa_N}} \min\left\{\frac{1}{|t_{k_1} - t_{k_2}|}, 1\right\} \ln N,$$

откуда выводится, что

$$\int_0^{\varkappa_N} \sum_{\rho_k} x^{-\rho_k} \Gamma(\rho_k) \sum_{\rho_k} \overline{x^{-\rho_k} \Gamma(\rho_k)} \, d\alpha \ll N \varkappa_N \ln^3 N = O\left(\frac{N}{(\ln N)^{\varepsilon}}\right).$$

Такой же порядок имеет и $\int\limits_{0}^{\varkappa_N} \frac{1}{x} \sum_{\rho_k} x^{-\rho_k} \Gamma(\rho_k)\, d\alpha$ и сопряженный с ним.

Далее,

$$\int\limits_{0}^{\varkappa_N} \frac{1}{xx} d\alpha = \frac{N}{4} + O\left(\frac{N}{\ln N}\right).$$

Из этих оценок выводим, что

$$\int\limits_{0}^{\varkappa_N} |S_1|^2 d\alpha = \frac{N}{4} + O\left(\frac{N}{(\ln N)^\varepsilon}\right),$$

и, стало быть,

$$\int\limits_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} |S_1|^2 d\alpha = \frac{N}{2} + O\left(\frac{N}{(\ln N)^\varepsilon}\right),$$

ч. т. д.

Поступило
4 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Линник, Матем. сборн., 19 (61) : 1 (1946).