Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

Академик М. В. КЕЛДЫШ

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Все рассматриваемые ниже уравнения в соответствующем пространстве Гильберта могут быть приведены к виду

$$y = L(\lambda) y + f, \quad L(\lambda) = K_0 + \lambda K_1 + \ldots + \lambda^n K_n, \tag{1}$$

где y и f — элементы гильбертова пространства, λ — комплексный параметр, K_i — вполне непрерывный оператор.

Вполне непрерывный оператор $R(\lambda)$ есть резольвента $L(\lambda)$, если $(E+R)(E-L)=E$. Если резольвента существует при некотором $\lambda=\lambda_0$, то она на всей плоскости есть мероморфная функция λ. Мы будем говорить, что y есть собственный элемент при собственном значении $\lambda=c$, а $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — присоединенные к нему элементы, если

$$y = L(c) y, \quad y_k = L(c) y_k + \frac{1}{1!}\frac{\partial L(c)}{\partial c} y_{k-1} + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{\partial^k L(c)}{\partial c^k} y. \tag{2}$$

Заметим, что если y есть собственный элемент, а $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — присоединенные к нему элементы, то $y(t) = e^{ct}\left(y_k + y_{k-1}\frac{t}{1!} + \cdots \right.$ $\left. \ldots + y\frac{t^k}{k!}\right)$ есть решение уравнения $y = K_0 y + K_1 \frac{\partial y}{\partial t} + \cdots + K_n \frac{\partial^n y}{\partial t^n}$.

Если $\lambda = c$ есть полюс резольвенты $R(\lambda)$, то главная часть резольвенты есть сумма слагаемых вида *

$$\frac{y^{(i)} z^{(i)}}{(\lambda-c)^{m_i}} + \frac{y^{(i)} z_1^{(i)} + y_1^{(i)} z^{(i)}}{(\lambda-c)^{m_i-1}} + \cdots + \frac{y^{(i)} z_{m_i-1}^{(i)} + y_1^{(i)} z_{m_i-2}^{(i)} + \cdots + y_{m_i-1}^{(i)} z^{(i)}}{\lambda - c}, \tag{3}$$

где $y^{(i)}, y_1^{(i)}, \ldots, y_{m_i-1}^{(i)}$ — собственная функция и присоединенные к ней функции для уравнения (1), а $z^{(i)}, z_1^{(i)}, \ldots, z_{m_i-1}^{(i)}$ — собственная функция и присоединенные к ней функции при $\lambda = \bar{c}$ для сопряженного уравнения $z = L^*(\lambda) z$, где $L^*(\lambda)$ — оператор, сопряженный с $L(\bar{\lambda})$.

Собственные и присоединенные функции, входящие в выражение (3) для полюса резольвенты, при каждом собственном значении могут быть всегда выбраны таким образом, чтобы между всеми собствен-

* Под yz мы понимаем оператор $Af = (f, z) y$.

ными и присоединенными функциями уравнения (1) выполнялись равенства, при $k=0, 1, \ldots, m_i-1$, $l=0, 1, \ldots, (m_j-1)$:

$$\left(\sum_{\nu=0}^{n-1} Y_{\nu k}^{(i)} c_j^{\nu}, z_l^{(j)}\right)+\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}\binom{\nu}{1} Y_{\nu k}^{(i)} c_j^{\nu-1} z_{l-1}^{(j)}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left(\sum_{\nu=l}^{n-1}\binom{\nu}{l} Y_{\nu k}^{(i)} c_j^{\nu-l}, z^{(j)}\right)=\delta_{ij}\,\delta_{k, m_j-l-1}, \tag{4}$$

где положено

$$(E-L(\lambda))\left(\frac{y^{(i)}}{(\lambda-c)^{k+1}}+\frac{y_1^{(i)}}{(\lambda-c)^{k}}+\cdots+\frac{y_k^{(i)}}{\lambda-c}\right)=\sum_{\nu=0}^{n-1} Y_{\nu k}^{(i)}\lambda^{\nu}. \tag{5}$$

Число N всех собственных и присоединенных функций, соответствующих полюсу резольвенты, мы будем называть кратностью собственного значения. Заметим, что след главной части оператора $\frac{\partial L}{\partial \lambda} R(\lambda)$ для полюса $\lambda=c$ равен $\frac{N}{c-\lambda}$.

Исходя из собственных и присоединенных элементов, удовлетворяющих равенствам (4), мы построим n систем собственных и присоединенных элементов

$$u_{\nu k}^{(i)}=\left[\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\, e^{c_i t}\left(y_k^{(i)}+y_{k-1}^{(i)}\frac{t}{1!}+\cdots+y^{(i)}\frac{t^k}{k!}\right)\right]_{t=0}, \qquad \nu=0, 1, \ldots, (n-1).$$

Определение. Система собственных и присоединенных элементов уравнения (1) называется n-кратно полной, если любая система из n элементов гильбертова пространства $f_1, f_2, \ldots, f_n$ может быть представлена как предел линейных комбинаций $f_{\nu}^{(N)}=\Sigma a_{kN}^{(i)} u_{\nu-1, k}^{(i)}$, $\nu=1, 2, \ldots, n$, с коэффициентами, не зависящими от ν.

В частности, при $n=1$ мы имеем полноту в обычном смысле.

Сделаем еще следующее замечание. Положим

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} Z_{\nu k}^{(i)}\lambda^{\nu}=L^*(\lambda)\left(\frac{z^{(i)}}{(\lambda-\bar c_i)^{k+1}}+\frac{z_1^{(i)}}{(\lambda-\bar c_i)^{k}}+\cdots+\frac{z_k^{(i)}}{\lambda-\bar c_i}\right),$$

тогда

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}(Z_{\nu k}^{(i)}, u_{\nu l}^{(j)})=\delta_{ij}\,\delta_{k, m_j-l+1}.$$

Если имеют место сходящиеся разложения

$$f_{\nu}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{m_i-1} a_k^{(i)} u_{\nu-1, k}^{(i)}, \qquad \nu=1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

то коэффициенты этих разложений определяются формулами

$$a_k^{(i)}=\sum_{\nu=0}^{n-1}(f_{\nu+1}, Z_{\nu, m_i-k+1}^{(i)}).$$

Отсюда, в частности, следует, что разложения вида (6) единственны.

2. Назовем оператор H полным, если система его собственных функций $x=\lambda Hx$, $\lambda\neq\infty$, полна.

Теорема 1. *Пусть H — полный самосопряженный оператор, некоторая степень которого H^m имеет конечную абсолютную* *норму, A—произвольный вполне непрерывный оператор, $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ — ограниченные операторы.*

Система собственных функций уравнения

$$y = (A + \lambda H B_1 + \cdots + \lambda^{n-1} H B_{n-1} + \lambda^n H) y, \tag{7}$$

а также сопряженного уравнения, n-кратно полная. Собственные значения уравнений (7) *асимптотически приближаются к лучам* $\arg \lambda = k\pi / n$.

Заметим, что в условиях теоремы 1 сходимость разложений (6), вообще говоря, не имеет места.

Пусть оператор H положителен. Обозначим через $\varphi(x)$ число собственных значений H, не превышающих x, и пусть $\varphi_n(x) = \varphi(x^n)$; через $\psi_\nu(x)$ обозначим число собственных значений уравнения (7), расположенных в угле $(2\nu - 1)\pi / n < \arg \lambda < (2\nu + 1)\pi / n$ с модулем, не превосходящим x.

Теорема 2. *Если в условиях теоремы* 1 *оператор положителен, то собственные значения уравнения* (7) *асимптотически приближаются к лучам* $\arg \lambda = 2\nu\pi / n$ *и при любом* $\varepsilon > 0$ *существуют сколь угодно большие значения* x, *для которых удовлетворяется неравенство*

$$(1 - \varepsilon)\varphi_n(x) \leqslant \psi_\nu(x) \leqslant (1 + \varepsilon)\varphi_n(x).$$

Налагая ограничения на $\varphi(x)$, можно получить более точное предложение.

Теорема 3. *Если в условиях теоремы* 2 $\varphi_n(x) / \omega(x) \to 1$ *при* $x \to \infty$, *где* $\omega(x)$ — *возрастающая, непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая неравенствам* $\alpha\omega(x) < x\omega'(x) < \beta\omega(x)$, $\beta < \alpha + 1$, *то* $\psi_\nu(x) / \varphi_n(x) \to 1$.

Доказательство этого предложения основывается на следующей теореме тауберова типа.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ — *положительные возрастающие функции, определенные при* $x > 0$, *причем* $\varphi(x) \to \infty$, $\alpha\varphi(x) < x\varphi'(x) < \beta\varphi(x)$ *при* $\beta < \alpha + 1$, *и положим*

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{d\varphi(\xi)}{(\xi + x)^{m+1}}, \quad g(x) = \int_0^\infty \frac{d\psi(\xi)}{(\xi + x)^{m+1}},$$

где m *есть целая часть* β. *Если при* $x \to \infty$ *имеем* $f(x) / g(x) \to 1$, *то* $\varphi(x) / \psi(x) \to 1$ *при* $x \to \infty$.

3. Приведенные в § 2 результаты могут быть использованы для установления полноты системы собственных функций и для установления асимптотических выражений для собственных значений широких классов несамосопряженных дифференциальных уравнений.

В качестве примера мы рассмотрим уравнения с частными производными эллиптического типа

$$M_\lambda(u) = \sum_{i,k=1}^{m} p_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} q_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + (r_0 + \lambda r_1 + \cdots + \lambda^n r_n) u = 0 \tag{8}$$

в области D, удовлетворяющей условиям Ляпунова, коэффициенты которого являются непрерывно дифференцируемыми функциями $x_1, x_2, \ldots, x_m$, причем p_{ik} и r_n действительны и $r_n > \alpha$, $\sum_{i,k} p_{ik}\xi_i\xi_k > \beta \sum_i \xi_i^2$ в D при $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Теорема 5. *Для уравнения* $M_\lambda(u) = 0$ *при граничном условии* $u = 0$ *или* $\sum_{i,k} p_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(N, x_k) - \sigma u = 0$, *где* σ — *непрерывная, комп-*

лексная функция точки границы области, а N — нормаль к границе D, имеют место следующие утверждения:

1) *Система собственных и присоединенных функций n-кратно полная.*

2) *Собственные значения, расположенные в угле $\frac{2\nu-1}{n}\pi \leqslant \arg\lambda < \frac{2\nu+1}{n}\pi$, имеют асимптотические выражения*

$$\lambda_k^{(\nu)} \sim \left\{\frac{\sigma_m}{2^m \pi^m} \int\limits_D \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_n}{\sqrt{\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)}}\right\}^{-2/nm} k^{\frac{2}{mn}} e^{\frac{2\nu\pi}{n} i},$$

где σ_m — объем единичной сферы m-мерного пространства и $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — определитель $|p_{ik}|$.

Отметим, что при $n=1$ часть теоремы, касающаяся асимптотических выражений собственных значений, была установлена Карлеманом ([1]).

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений в ряде случаев могут быть установлены более точные теоремы.

Рассмотрим уравнение

$$M_\lambda(u) = u^{(m)} + p_1(x, \lambda) u^{(m-1)} + \cdots + p_{m-1}(x, \lambda) u' + [p_m(x, \lambda) + \lambda^n] u = 0, \tag{9}$$

где $p_k(x, \lambda)$ — полином от λ степени меньше, чем kn/m.

При некоторых ограничениях на граничные условия можно установить n-кратную полноту системы собственных функций уравнения (9), а при $m \leqslant n$ — сходимость n-кратных разложений.

Для определенности мы укажем лишь два случая граничных условий:

$$y^{(k)}(0) = y^{(k)}(1), \quad k = 0, 1, \ldots, (m-1) \tag{10}$$

и

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^{(\nu)} y^{(k)}(0) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, l; \qquad \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k^{(\nu)} y^{(k)}(1) = 0, \quad \nu = (l+1), \ldots, m, \tag{11}$$

причем $0 < l < m$.

Теорема 6. *Система собственных функций уравнения* (9) *при граничных условиях* (10) *или* (11) *n-кратно полная.*

При $m > n$ имеют место равномерно сходящиеся разложения

$$y_\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_k a_k^{(i)} u_{\nu-1, k}^{(i)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

для n произвольных дифференцируемых m раз функций, удовлетворяющих граничным условиям.

При $n = m$ существует подпоследовательность частных сумм разложений (12), *которая равномерно сходится.*

Отметим, что в случае $n=1$ этот результат получен Биркгофом ([2]). В случае $n = m$ Я. Д. Тамаркин ([3]) установил ряд предложений о разложении одной функции в ряд по собственным функциям.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
16 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Carleman, Ber. d. Math.-Phys. Klasse d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig, 119 (1936). [2] G. D. Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 9, 219 (1908). [3] Я. Д. Тамаркин, О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, 1917.