Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVII, № 1

*МАТЕМАТИКА*

А. Ф. ГОЛУБЧИКОВ

# О СТРУКТУРЕ АВТОМОРФИЗМОВ КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ

*(Представлено академиком И. Г. Петровским 29 XII 1950)*

1. В теории групп Ли большую роль играют автоморфизмы, т. е. линейные преобразования, сохраняющие операцию коммутирования в инфинитезимальной группе. Автоморфизмы компактных полупростых групп Ли были рассмотрены Э. Картаном [2] и Г. Вейлем [1]. Ф. Р. Гантмахером [3] были детально исследованы автоморфизмы простой структуры комплексных полупростых групп Ли.

В настоящей работе устанавливается связь между системой элементарных делителей матрицы (инфинитезимального элемента матричной группы) и системой элементарных делителей внутреннего инфинитезимального автоморфизма, порожденного данным инфинитезимальным элементом. Вопрос решается для четырех бесконечных серий простых групп Ли: $A_n$, $B_n$, $C_n$, $D_n$.

Замечание. В силу связи, существующей между конечными и инфинитезимальными автоморфизмами, соответствующие результаты легко сформулировать для внутренних конечных автоморфизмов указанных серий простых групп Ли.

2. В пространстве всех квадратных матриц $n$-го порядка рассмотрим операцию коммутирования

$$y = ax - xa, \tag{1}$$

где $a$ — заданная, $x$ — произвольная квадратные матрицы. Эта операция является линейной и в соответствующем $n^2$-мерном векторном пространстве может быть задана некоторой матрицей $A$ порядка $n^2$:

$$y = Ax, \tag{2}$$

где $x$ — произвольный $n^2$-мерный вектор.

Теорема 1. *Пусть* $(\lambda - \lambda_i)^{p_{gi}}$ $(p_{gi} > 0;\ i = 1, 2, \ldots, s;\ g = 1, 2, \ldots, g_i)$ — *элементарные делители матрицы* $a$ *кратности* $t_{gi} \geqslant 0$, *причем* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — *различные между собой характеристические числа матрицы* $a$.

*Тогда матрица* $A$ *имеет элементарные делители*

$$(\lambda - (\lambda_i - \lambda_j))^{m_{gh,\,ij} - k_{gh,\,ij}}$$

*кратности* $t_{gi}\, t_{hj}$ $(m_{gh,\,ij} = p_{gi} + p_{hj} - 1;\quad k_{gh,\,ij} = 0, 2, 4, \ldots, m_{gh,\,ij} - |p_{gi} - p_{hj}| - 1;\ g = 1, 2, \ldots, g_i;\ h = 1, 2, \ldots, h_j;\ i, j = 1, 2, \ldots, s)$.

Доказательство этой теоремы основывается на следующих соображениях. Характеристическому числу $\mu_i$ матрицы $A$ отвечают элементарные делители $(\mu - \mu_i)^k$ кратности $t_i^{(k)}$, где $t_i^{(k)} = -r_i^{(k-1)} + 2r_i^{(k)} - r_i^{(k+1)}$, а числа $r_i^{(k)}$ являются размерностями подпространств, образованных векторами, удовлетворяющими уравнению

$$(A - \mu_i F)^k x = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, k_i),$$

$k_i$ — наименьший показатель, для которого $(A - \mu_i E)^{k_i} x \equiv 0$.

Для определения числа $r_i^{(k)}$ решается матричное уравнение

$$\sum_{l=0}^{k} (-1)^l C_k^l a^{k-l} x a^l = 0, \tag{3}$$

где $a$ — заданная, $x$ — произвольная квадратные матрицы, $C_k^l$ — число сочетаний из $k$ по $l$; $r_i^k$ является числом линейно независимых решений уравнения (3).

3. В матричной инфинитезимальной группе внутренний инфинитезимальный автоморфизм $A$, порожденный инфинитезимальным элементом $a$, задается равенством

$$Ax = ax - xa, \tag{4}$$

где $a$ — заданная, $x$ — произвольная матрицы (инфинитезимальные элементы), $A$ — матрица рассматриваемого автоморфизма.

Для бесконечных серий простых групп Ли получены следующие результаты.

Теорема 2. *Инфинитезимальный автоморфизм $A$ унимодулярной группы $A_n$, порожденный ее инфинитезимальным элементом (матрицей) $a$, имеет элементарные делители $(\lambda - (\lambda_i - \lambda_j))^{m_{gh,ij} - k_{gh,ij}}$ кратности $t_{gi} t_{hj}$, причем общая кратность элементарного делителя $\lambda$ на единицу меньше указанной.*

Теорема 3. *Для групп вращений $B_n$ и $D_n$ связь между системой элементарных делителей матрицы $a$ и системой элементарных делителей соответствующего внутреннего инфинитезимального автоморфизма $A$ задается табл. 1 и 2.*

Примечание. Для групп $C_n$ имеют место результаты, аналогичные теореме 3. В табл. 1 и 2 следует лишь изменить четность чисел $p_{gi}$ и положить $m'_{gh,ij} = m_{gh,ij}$.

Таблица 1

Элементарные делители матрицы $a$ $(a + a' = 0)$

| Элементарные делители | Кратность | Значение индексов |
|---|---|---|
| $(\lambda \pm \lambda_i)^{p_{gi}},\ \lambda_i \neq 0$ . . . . . . | $t_{gi}$ | $i = 1, 2, \ldots, s$; $g = 1, 2, \ldots, g_i$ |
| $\lambda^{p_{go}}$ . . . . . . . . . . . . . | $t_{go}$ | $p_{go}$ нечетно; $g = 1, 2, \ldots, g_o$ |
| $\lambda^{p_{go}}$ . . . . . . . . . . . . | $2\,t_{go}$ | $p_{go}$ четно; $g = 1, 2, \ldots, g_o$ |

4. Из теорем 2 и 3 следует теорема 4.

Теорема 4. *Размерности инвариантных подпространств, отвечающих элементарным делителям внутреннего инфинитезимального автоморфизма с характеристическими числами, отличными от нуля, не превосходят наибольшей размерности таких* *подпространств, отвечающих элементарным делителям с характеристическим числом, равным нулю.*

Таблица 2

Элементарные делители инфинитезимального автоморфизма группы вращений, порожденного ее инфинитезимальным элементом

| Элементарные делители | Кратность | Значение индексов | |
|---|---|---|---|
| $(\lambda - (\pm \lambda_i \pm \lambda_j))^{m_{gh,ii} - k_{gh,ij}}$ | $t_{gi} t_{hj}$ | $i < j$ | $i, j = 1, 2, \ldots, s$; $i = 0$ при $p_{go}$ четном |
| $(\lambda - (\pm \lambda_i \pm \lambda_i))^{m_{gh,ii} - k_{gh,ii}}$ | $t_{gi} t_{hi}$ | $g < h$ | |
| $(\lambda - (\pm \lambda_i \pm \lambda_i))^{m_{gg,ii} - k_{gg,ii}}$ | $\frac{t_{gi}(t_{gi} - 1)}{2}$ | | |
| $(\lambda \pm 2\lambda_i)^{m'_{gg,ii} - k'_{gg,ii}}$ | $t_{gi}$ | | |
| $(\lambda \pm \lambda_i)^{m_{gh,io} - k_{gh,io}}$ | $t_{gi} t_{ho}$ | $p_{ho}$ нечетно | |
| $\lambda^{m_{gg,ii} - k_{gg,ii}}$ | $t_{gi}$ | | |
| $\lambda^{m_{gh,oo} - k_{gh,oo}}$ | $t_{go} t_{ho}$ | $g < h$ | $p_{go}$, $p_{ho}$ нечетные |
| $\lambda^{m_{gg,oo} - k_{gg,oo}}$ | $\frac{t_{go}(t_{go} - 1)}{2}$ | | |
| $\lambda^{m'_{gg,oo} - k'_{gg,oo}}$ | $t_{go}$ | | |

$m_{gh,ij} = p_{gi} + p_{hj} - 1$; $m'_{gg,ii} = 2p_{gi} - 3$; $k_{gh,ij} = 0, 2, 4, \ldots, m_{gh,ij} - |p_{gi} - p_{hj}| - 1$; $k'_{gg,ii} = 0, 4, 8, \ldots, m'_{gg,ii} - 1$ при четном $p_{gi}$, $k'_{gg,ii} = 0, 4, 8, \ldots, m'_{gg,ii} - 3$ при нечетном $p_{gi}$.

Этот результат справедлив и для тех полупростых групп, компонентами которых являются простые группы рассмотренных нами четырех бесконечных серий $A_n$, $B_n$, $C_n$, $D_n$.

Сталинградский педагогический и учительский институт им. А. С. Серафимовича

Поступило 29 XII 1950

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Weyl, Math. Zs., **23**, 217 (1925); **24**, 328 (1925). [2] E. Cartan, Bull. Sci. Math., sér. 2, **49**, стр. 130 и 361 (1925). [3] Ф. Гантмахер, Матем. сборн., (47), **1**, 101 (1939).