Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Член-корреспондент АН СССР Г. А. ГРИНБЕРГ

О РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ ПЛИТЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНТУРОМ*

1. Известно, что как решение плоской задачи теории упругости при заданных на контуре области напряжениях, так и решение задачи об изгибе однородной изотропной тонкой плиты с закрепленным контуром сводятся к частным случаям следующей общей бигармонической задачи: найти функцию ψ, удовлетворяющую внутри рассматриваемой области (f) уравнению $\Delta^2\psi=\Phi$, где Φ — некоторая заданная внутри области функция, причем на контуре (s) области заданы в каждой его точке значения самой функции ψ и ее нормальной к контуру производной $\partial\psi/\partial n$.

В случае первой из указанных выше задач нужно положить $\Phi=0$ и $(\psi)_{(s)}=q(s)$, $(\partial\psi/\partial n)_{(s)}=r(s)$, где $q(s)$ и $r(s)$ — заданные функции длины дуги s, отсчитываемой вдоль контура от произвольной его точки. ψ отвечает в этом случае функции Эри рассматриваемой задачи. Во втором случае надо положить $\Phi=p(x,y)/D$, где $p(x,y)$ — удельная нагрузка на плиту, D — цилиндрическая жесткость плиты, причем ψ — это смещение некоторой точки плиты и на контуре должны выполняться условия $(\psi)_{(s)}=(\partial\psi/\partial n)_{(s)}=0$.

Рассмотрим в общем виде вопрос о решении уравнения $\Delta^2\psi=\Phi$ при условиях, что $(\psi)_{(s)}=q(s)$ и $(\partial\psi/\partial n)_{(s)}=r(s)$, где $q(s)$ и $r(s)$ — заданные функции.

Полагая в формуле Гаусса — Остроградского

$$\int\limits_{(f)}(v\Delta u-u\Delta v)\,df=\int\limits_{(s)}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds \tag{1}$$

$u=\psi$ и принимая за v любую гармоническую в рассматриваемой области функцию, удовлетворяющую, стало быть, уравнению $\Delta v=0$, получаем:

$$\int\limits_{(f)}v\Delta\psi\,df=\int\limits_{(s)}\left[vr(s)-\frac{\partial v}{\partial n}q(s)\right]ds, \tag{2}$$

причем правая часть здесь, при заданной v, является известной величиной. Обозначая, далее, через θ любую такую функцию, что во всей

---

* Во время написания этой статьи нам стало известно о существовании работы З. Х. Рафальсона (1), в которой получены основные результаты, изложенные в п. 1 настоящей статьи. Мы этот пункт все же сохраняем, поскольку в нем дано весьма краткое и прямое изложение существа применяемого метода.

рассматриваемой области выполняется уравнение $\Delta\theta = \Phi$, и замечая, что, очевидно, $\psi = \theta - F$, где $\Delta F = 0$, находим из (2):

$$\int_{(f)} vF\,df = \int_{(f)} v\theta\,df + \int_{(s)} \left[q(s)\frac{\partial v}{\partial n} - vr(s)\right]ds. \tag{3}$$

Пусть известна какая-нибудь полная система гармонических в области (f) функций φ_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, т. е. такая, что любая гармоническая в (f) функция может быть выражена в виде конечной или бесконечной суммы вида $\sum\limits_{(i)} a_i\varphi_i$, где a_i — постоянные коэффициенты. Образуем из них ортонормированную систему функций ψ_n, $n \geqslant 0$, по схеме:

$$\psi_0 = A_0\varphi_0; \quad \psi_n = A_n\left[\sum_{p=0}^{n-1} C_{np}\psi_p - \varphi_n\right], \quad n = 1, 2, \ldots, \infty, \tag{4}$$

где A_i и C_{np} — постоянные, определяющиеся из условий вида

$$\int_{(f)} \psi_n\psi_m\,df = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 1 & \text{при } m = n. \end{cases} \tag{5}$$

Из условий полноты этой системы в указанном выше смысле следует, что должно иметь место разложение

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n\psi_n, \quad \text{где } F_n = \int_{(f)} \psi_n F\,df. \tag{6}$$

Полагая в (3) $v = \psi_n$, находим:

$$F_n = \int_{(f)} \psi_n F\,df = \int_{(f)} \psi_n\theta\,df + \int_{(s)} \left[q(s)\frac{\partial\psi_n}{\partial n} - \psi_n r(s)\right]ds, \tag{7}$$

откуда определяются искомые коэффициенты F_n, а стало быть, и F. На этом и заканчивается нахождение величины $\Delta\psi = \theta - F$. Самую функцию ψ получим теперь, интегрируя уравнение $\Delta\psi = \theta - F$ при одном из граничных условий $(\psi)_{(s)} = q(s)$ или $(\partial\psi/\partial n)_s = r(s)$ или при использовании какой-либо их комбинации.

2. Рассмотрим, в первую очередь, применение этих общих соображений к решению задачи об изгибе прямоугольной пластинки с закрепленными краями. Поместим начало координат в центре O пластины, оси OX и OY направим параллельно ее сторонам. Ограничиваемся здесь приведением результатов для простейшего случая квадратной пластины с длиной стороны $2a$ и с симметричной относительно сторон квадрата нагрузкой *. В этом случае можно положить:

$$\varphi_k = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_k a}\left[\cos\alpha_k x \operatorname{ch}\alpha_k y + \cos\alpha_k y \operatorname{ch}\alpha_k x\right], \quad \alpha_k = \frac{2k+1}{2a}\pi, \; k = 1, 2, \ldots, \infty, \tag{8}$$

причем легко показать, что эти функции составляют полную, в указанном выше смысле, систему. Составляя из них по схеме (4) — (5) ортонормированную систему функций ψ_n, получим выражения вида

---

* Т. е. нагрузки $p(x, y)$, удовлетворяющей условиям четности по отношению к x и y и условию $p(x, y) = p(y, x)$.

$$\psi_n = \frac{1}{a}\sum_{s=0}^{n} B_{ns}\varphi_s, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \infty, \tag{9}$$

где B_{ns} — некоторые численные коэффициенты (см. табл. 1).

Таблица 1

Числа B_{ns}

n \ s	0	1	2	3	4
0	0,6601	—	—	—	—
1	−0,0593	−1,399	—	—	—
2	0,0132	−0,1508	−1,878	—	—
3	−0,0041	−0,0756	−0,1516	−2,258	—
4	0,0016	−0,0401	0,1004	−0,1428	−2,581

3. Применим найденную систему функций к случаю постоянной по поверхности пластины нагрузки $p = \text{const}$. Так как в этом случае можно положить $\theta = \frac{p}{4D}(x^2 + y^2 - 2a^2)$, то (7) дает, при использовании (9) и (8) и так как $q(s) = r(s) = 0$,

$$F_n = \frac{p}{4D}\int\limits_{(f)} (x^2 + y^2 - 2a^2)\,\psi_n df = \frac{32pa^3}{\pi^3 D}\sum_{s=0}^{n} B_{ns}\frac{(-1)^{s+1}}{(2s+1)^3} = \frac{pa^3}{4D}a_n. \tag{10}$$

Для первых пяти коэффициентов a_n получаются значения:

n	0	1	2	3	4
a_n	−2,724	0,0308	−0,016	0,0065	−0,0030

Для изгибающего момента $M(x)$ вдоль стороны $y = a$ получаем:

$$-M(x) = D(\Delta\psi)_{y=a} = \frac{pa^2}{4}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{s=0}^{n} B_{ns}\cos\alpha_s x\right\}. \tag{11}$$

Для максимального изгибающего момента $-M_{\max}$ в середине этой стороны, т. е. при $x = 0$, получается отсюда, при использовании найденных выше пяти функций ψ_n, значение $-M_{\max} = 0{,}0512p(2a)^2$, тогда как согласно С. П. Тимошенко (²) точное значение коэффициента равно 0,0513. Далее, интегрируя уравнение

$$\Delta\psi = \frac{p}{4D}(x^2 + y^2 - 2a^2) - F = \frac{p}{4D}(x^2 + y^2 - 2a^2) - \sum_{n=0}^{\infty} F_n\psi_n$$

при условии, что $(\psi)_{(s)} = 0$, легко найдем, в частности, следующую формулу для прогиба пластины в центре:

$$(\psi)_{x=y=0} = 0{,}202\frac{pa^4}{D}, \tag{12}$$

что точно совпадает с соответствующим значением у Тимошенко (²).

Дальнейшее вычисление показывает также, что значения нормальных производных $\partial\psi/\partial n$ на контуре пластины в пределах точности вычисления равны при этом повсеместно нулю.

4. Совершенно аналогичным образом может быть получено с помощью той же системы функций ψ_n и решение задачи изгиба квадратной плиты в случае загрузки ее сосредоточенной силой в центре, причем за исходное частное решение можно принять решение для

той же силы, но для свободно опертых краев. Значения прогиба в центре и максимального изгибающего момента, вычисленные при помощи пяти функций ψ_n, оказываются в точности равными значениям этих величин, приводимым у Тимошенко ([2]).

5. Система функций ψ_n может быть использована и для решения плоской задачи теории упругости для внутренности квадрата, если приложенные на контуре его напряжения обладают соответствующей симметрией. Нами рассмотрена, например, задача о растяжении такого квадрата нормальными к его сторонам силами, равномерно распределенными вдоль отрезков длиной $2c$ симметрично относительно середины каждой стороны. Приводим получающиеся при этом при разных величинах отношения c/a значения суммы $\sigma_x + \sigma_y$ главных напряжений в центре квадрата, отнесенной к P/a, где $2P$ — полное усилие, приложенное к каждой из сторон:

c/a	1	0,5	0
$(\sigma_x + \sigma_y)a/P$	1,998	2,34	2,60

Первый случай соответствует равномерной нагрузке граней и должен был бы дать значение $(\sigma_x + \sigma_y)\,a/P = 2$, а не 1,998, т. е. расхождение составляет $0{,}1\%$. Последний столбец отвечает случаю сосредоточенных сил, приложенных в центрах сторон, и дает значение искомого отношения, близкое к $8/\pi = 2{,}55$, что соответствовало бы той же суммарной нагрузке, равномерно распределенной по окружности радиуса a, описанной из центра рассматриваемого квадрата.

6. Отметим еще следующую общую теорему. Пусть W и W^0 обозначают два решения уравнения $\Delta^2 W = p(x, y)/D$ изгиба тонкой плиты с произвольным контуром под действием нагрузки $p(x, y)$, из которых первое отвечает условиям $(W)_{(s)} = (\partial W/\partial n)_{(s)} = 0$, т. е. жесткому закреплению на контуре, а второе — условиям $(W_0)_{(s)} = 0$ и $(\Delta W)_{(s)} = 0$, что соответствует, например, в случае плит с многоугольным контуром свободно опертым краям. Тогда, если положить в (3) и (7) $\Delta W = \Delta W^0 - F$, то имеет место связь:

$$\frac{1}{D}\left[\int\limits_{(f)} W^0 p\,df - \int\limits_{(f)} W p\,df\right] = \frac{P}{D}\left(\overline{W^0} - \overline{W}\right) = \int\limits_{(f)} F^2 df = \sum_{k=0}^{\infty} F_k^2, \qquad (13)$$

где $P = \int\limits_{(f)} p\,df$ — полная нагрузка на пластину, а $\overline{W^0}$ и $\overline{W}$ — средние „взвешенные“ с весом $p(x, y)$ смещения точек пластины под действием той же нагрузки, но при указанных выше различных условиях закрепления. В частности, если нагрузка — это сосредоточенная сила, то (13) принимает вид:

$$\frac{P}{D}\left(W_p^0 - W_p\right) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k^2, \qquad (14)$$

где через W_p^0 и W_p обозначены смещения непосредственно под точкой приложения силы. Отсюда, если известно одно из этих смещений и найдены F_k, легко найти второе.

Ленинградский физико-технический институт
Академии наук СССР

Поступило
18 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] З. Х. Рафальсон, ДАН, 64, № 8 (1949). [2] С. П. Тимошенко, Пластинки и оболочки, 1948.