Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

Р. Н. ЩЕРБАКОВ

РЕПЕР ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ В АФФИННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 XII 1950)

Репер линии на поверхности в метрической геометрии получил разнообразные применения. В этой статье даются некоторые приложения аффинно-инвариантного репера линии на поверхности, построенного при помощи метода внешних форм Картана [1].

§ 1. В эквиаффинной геометрии деривационные формулы канонического репера линии L на поверхности могут быть представлены в виде

$$\frac{dr}{ds}=e_1,\quad \frac{de_1}{ds}=\alpha e_1+\beta e_2+e_3,\quad \frac{de_2}{ds}=\mu e_1+\pi e_2.$$

Здесь r — радиус-вектор переменной точки линии L; e_i — единичные векторы репера; ds, α, β, γ, μ, π — инварианты репера, которые выражаются через инвариантные дифференциальные формы аффинной теории поверхностей φ, ψ, χ, $\varkappa$, φ^* [2] следующим образом:

$$ds=\varphi^{1/2},\quad \alpha=\frac{\psi}{\varphi^{3/2}},\quad \beta=\frac{1}{\rho}+\frac{\bar\psi}{\varphi^{3/2}},\quad \gamma=\frac{1}{\rho}-\frac{\bar\psi}{\varphi^{3/2}},\quad \mu=\frac{\varphi^*}{\varphi},\quad \pi=-\frac{\varkappa}{\varphi},$$

где $\frac{1}{\rho}$ и $\bar\psi$ отличаются лишь множителем $\sqrt{-1}$ от дифференциатора Бельтрами $\frac{\Delta\varphi}{\sqrt{\nabla\varphi}}+\nabla\left(\varphi,\frac{1}{\sqrt{\nabla\varphi}}\right)$ и второй кубичной формы χ [2].

§ 2. Векторы и инварианты репера геометрически характеризуются следующим образом: e_1 есть первый вектор канонического репера „нормального сечения“ (т. е. плоской кривой, получающейся при пересечении поверхности плоскостью, проходящей через касательную к L и аффинную нормаль поверхности); — e_2 — первый вектор канонического репера „сопряженного нормального сечения“ (касательная к L заменяется сопряженным направлением); e_3 — вектор аффинной нормали поверхности; α и $\beta-\gamma$ суть аффинные угловые коэффициенты аффинных нормалей нормального сечения и сопряженного нормального сечения относительно репера; β и γ — координаты соприкасающейся плоскости и лучевой точки („ray-point“ [3]); $-\frac{\pi}{\mu}$ — аффинный угловой коэффициент касательной к отображению L^* линии L на индикатрису аффинных нормалей („Krümmungsbild“ [2]); $\mu=\pm|K|^{-1/4}\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2$, где K — отношение поверхностных, а $\frac{ds^*}{ds}$ — отношение линейных элементов поверхности и индикатрисы аффинных нормалей. Инварианты α, β, π являются аналогами, соответственно, нормальной кривизны, геодезической кривизны и геодезического кручения метрической теории линии на поверхности.

Из соотношений, связывающих инварианты линии на поверхности с инвариантами поверхности, важнейшими являются:

$$4\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2 = 2J, \quad (\mu + H)^2 - \pi^2 = H^2 - K,$$

где J — инвариант Пика, H и K — средняя и полная афинные кривизны поверхности.

§ 3. Любому аффинно-инвариантному классу линий на поверхности соответствует некоторое натуральное уравнение, выраженное через инварианты репера, и наоборот, всякое натуральное уравнение характеризует некоторый аффинно-инвариантный класс линий на поверхности. Союзные линии („union curves" [3]) конгруэнции аффинных нормалей имеют уравнение $\beta = 0$; дуально-союзные [3] той же конгруэнции (т. е. цилиндрические линии Петерсона или линии тени) $\gamma = 0$; линии Дарбу $\alpha = 0$; аффинные линии кривизны $\pi = 0$; прообразы асимптотических линий индикатрисы аффинных нормалей $\mu = 0$; линии Сегре $\beta - \gamma = 0$; аффинно-геодезические линии (экстремали инварианта ds) $\beta + \gamma = 0$; плоские линии $\frac{d\beta}{ds} - \alpha\beta + \pi = 0$; конические линии $\frac{d\gamma}{ds} = -\alpha\gamma$; аффинно-базисные линии [4] $\frac{d}{ds}(2\alpha \pm (\beta - \gamma)) + \mu \pm \pi \pm (\gamma \mp \alpha)(2\alpha \pm \beta \mp \mp \gamma) = 0$. Линии $2\alpha \pm (\beta - \gamma) = \mathrm{const}$ характеризуются тем, что аффинный линейный элемент ds такой линии L лишь постоянным множителем отличается от аффинной длины дуги асимптотической линии, имеющей с L общее начало счета. Линии $A\mu + B\pi + C = 0$ (A, B, C — постоянные) характеризуются наличием инвариантного вектора e_r, сохраняющего постоянное положение относительно инвариантных векторов репера линии L и относительно инвариантных векторов репера линии L^*. При $C = 0$ вектор e_r совпадает с касательной к L^*; поэтому линии $\mu : \pi = \mathrm{const}$ являются аналогом линий $\frac{1}{T_g} : \nu = \mathrm{const}$ [5] метрической теории линий на поверхности.

§ 4. Наличие сопряженных сетей определенного вида характеризует ряд аффинно-инвариантных классов поверхностей. Наличие сопряженных сетей, состоящих из линий $2\alpha + \beta - \gamma = \mathrm{const}$ и $2\alpha - \beta + \gamma = \mathrm{const}$, характеризует класс поверхностей $J = \mathrm{const}$ (произвол — три функции одного аргумента). Наличие сопряженной сети линий $\mu : \pi = \mathrm{const}$ характеризует класс поверхностей с постоянным отношением аффинных главных кривизн ($\nu_1 : \nu_2 = \mathrm{const}$); произвол — четыре функции одного аргумента. Наличие сопряженной сети, состоящей из семейства линий $A_1\mu + B_1\pi + C_1 = 0$ и семейства линий $A_2\mu + B_2\pi + C_2 = 0$, характеризует класс поверхностей, главные аффинные кривизны которых связаны соотношением $a(\nu_1^2 + \nu_2^2) + c\nu_1\nu_2 + f\nu_1 + g\nu_2 + h = 0$ с постоянными коэффициентами. Этот класс определяется с произволом в четыре функции одного аргумента и содержит $\left(\text{при } \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}\right)$ поверхности $H = \mathrm{const}$. Класс „k" поверхностей с „двояко-союзной сетью" (т. е. с сопряженной сетью, состоящей из семейства линий $\beta = 0$ и семейства линий $\gamma = 0$) определяется с произволом в четыре функции одного аргумента и характеризуется тем, что индикатриса аффинных нормалей поверхности этого класса есть линейчатая поверхность, прямолинейные образующие которой соответствуют линиям постоянной полной аффинной кривизны на поверхности.

§ 5. В класс „k" входят поверхности переноса, линии переноса которых образуют сеть Дарбу — Сегре. Эти поверхности определяются в виде:

$$r = u^2 C_1 + u C_2 + V \qquad (1)$$

(где C_1 и C_2 — постоянные векторы, а $V(v)$ удовлетворяет уравнению: $V''' - w' V'' - 3(w'' + 2w'^2) V' = 0$), с произволом одной функции $w(v)$. Линии переноса — плоские и лежат в пучках параллельных плоскостей. Этот класс поверхностей рассматривался В. Хааком ([6]), но данная им геометрическая характеристика линий переноса ошибочна.

§ 6. Рассмотрим задачу (аналогичную задаче Бианки метрической геометрии): найти поверхность, в касательной плоскости которой в каждой точке можно выбрать прямую l так, чтобы построенная таким образом конгруэнция и конгруэнция аффинных нормалей поверхности образовывали расслояемую пару. Такое построение оказывается возможным для двух классов поверхностей. Первый класс определяется с произволом в две функции одного аргумента и состоит из таких поверхностей с двояко-союзной сетью, у которых индикатриса аффинных нормалей вырождается в плоскую линию. Касательные к этой плоской линии и прямые l параллельны касательным к союзным аффинным линиям кривизны на поверхности. Другое семейство аффинных линий кривизны состоит из цилиндрических линий. Обе конгруэнции расслояемой пары цилиндрические. В этот класс входят те из поверхностей (1), для которых функция $\varphi = w'$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dv} \log(\varphi' + 3\varphi^2) = -2\varphi,$$

а также поверхности, аффинные линии кривизны которых являются одновременно союзными линиями Дарбу и Сегре. Второй класс есть класс собственных аффинных сфер.

Поступило
30 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Методы внешних форм Картана, М. — Л., 1948. [2] W. Blaschke, Affine Differentialgeometrie, Berlin, 1923. [3] E. P. Lane, A Treatise on Projective Differential Geometry, 1942. [4] Н. Г. Туганов, ДАН, 20, № 7—8 (1938). [5] Н. Г. Туганов, ДАН, 57, № 4 (1947). [6] W. Haak, Math. Zs., 35, 66 (1932).