Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

Ю. А. ШРЕЙДЕР

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ СОВМЕСТНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 20 XII 1950)

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений [2,3] делятся обычно на итерационные методы (метод Зейделя, простых итераций и др.) и так называемые прямые методы, т. е. методы, дающие возможность после строго определенного числа операций получить точный ответ (конечно, при том условии, что все арифметические операции производятся точно). За последние годы большое распространение получили прямые методы, в частности, рассматривались [4] такие модификации известных схем, которые наиболее приспособлены к решению с помощью счетно-аналитических машин.

Для последней цели особенно существенно, чтобы вычислительный процесс состоял из большого числа однотипных повторяющихся операций. Обычно применяемые методы решения, являющиеся в основном (кроме метода Холецкого [2]) видоизменением схемы Гаусса, приспособлены для решения хорошо обусловленных [2] систем с положительно определенной матрицей. В противном случае даже для хорошо обусловленной системы эти методы могут привести к делению на нуль или на очень малое число; с последним обстоятельством можно бороться либо путем перестановки строк (столбцов) матрицы в процессе вычислений, либо заранее преобразуя решаемую систему так, чтобы матрица стала положительно определенной. Первый процесс трудно автоматизировать на счетно-аналитических машинах, а второй громоздок и „портит" исходную систему [5]. Метод Холецкого вообще применим только для положительно определенных матриц.

В настоящей работе мы указываем метод решения систем линейных алгебраических уравнений, одинаково пригодный для любой хорошо обусловленной системы.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

которую мы будем иногда записывать в векторной форме

$$Ax = b. \tag{2}$$

Для того чтобы найти решение системы (2), мы подберем матрицу B такую, что

$$BA = \Lambda U, \tag{3}$$

где Λ — диагональная матрица, а U — унитарная. Тогда решение имеет вид:

$$x = U^* \Lambda^{-1} Bb, \tag{4}$$

причем матрица Λ^{-1} (обратная к Λ) и U^* (транспонированная к U) легко могут быть определены. При этом для вычислительной схемы возможны два различных варианта. Если нам нужно найти только решение системы (2), то мы последовательно определяем компоненты вектора Bb, а затем с помощью матричного умножения определяем решение по формуле (4); если же нам нужно иметь обратную к A матрицу A^{-1}, то мы последовательно определяем элементы матрицы B, а затем вычисляем

$$A^{-1} = U^* \Lambda^{-1} B. \tag{5}$$

Элементы матриц U и Λ мы вычисляем в обоих случаях.

Рассмотрим сначала первый вариант вычислительной схемы.

Прежде всего заметим, что для того, чтобы некоторая матрица C могла быть представлена в виде произведения диагональной на унитарную $C = \Lambda U$, необходимо и достаточно, чтобы для элементов матрицы C выполнялись условия

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} c_{kj} = 0 \qquad (i \neq k). \tag{6}$$

При этом элементы матрицы Λ суть

$$\lambda_{ik} = \delta_{ik} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}}\,. \tag{7}$$

Первый этап вычислительного процесса состоит из последовательной ортогонализации строк матрицы A. Предположим, что мы уже заменили систему (1) некоторой эквивалентной системой

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(\nu)} x_k = b_i^{(\nu)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

для которой выполнены соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(\nu)} a_{lk}^{(\nu)} = 0 \qquad (i < l \leqslant \nu). \tag{9}$$

Тогда мы заменим $\nu + 1$-е уравнение системы (9) линейной комбинацией

$$a_{\nu k}^{(\nu+1)} = a_{\nu k}^{(\nu)} + \mu_{\nu-1}^{(\nu)} a_{\nu-1,\,k}^{(\nu)} + \mu_{\nu-2}^{(\nu)} a_{\nu-2,\,k}^{(\nu)} + \cdots, \tag{10}$$

$$b_{\nu}^{(\nu+1)} = b_{\nu}^{(\nu)} + \mu_{\nu-1}^{(\nu)} b_{\nu-1}^{(\nu)} + \mu_{\nu-2}^{(\nu)} b_{\nu-2}^{(\nu)} + \cdots \tag{10'}$$

При этом величины $\mu_{\nu-1}^{(\nu)}, \mu_{\nu-2}^{(\nu)}, \ldots, \mu_1^{(\nu)}$ выберем так, чтобы удовлетворялись условия

$$\sum_{k=0}^{n} a_{\nu k}^{(\nu+1)} a_{ik}^{(\nu)} = 0 \qquad (i < \nu). \tag{11}$$

Условия (11) и (9) дают нам

$$\mu_i^{(\nu)} = -\frac{\sum_{k=1}^{n} a_{\nu k}^{(\nu)} a_{ik}^{(\nu)}}{\sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik}^{(\nu)}\right)^2}. \tag{12}$$

Наконец, мы полагаем

$$a_{ik}^{(\nu+1)} = a_{ik}^{(\nu)} \quad (i \neq \nu). \tag{13}$$

После n таких шагов мы придем к системе

$$Cx = d, \tag{14}$$

которая эквивалентна системе (2). При этом для элементов матрицы C

$$c_{ik} = a_{ik}^{(n)} \tag{15}$$

справедливы соотношения (6). Фактически мы применили здесь к последовательности векторов $(a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n})$; $(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$; ... ... $(a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn})$ процесс ортогонализации Якоби [1]. Этот процесс всегда приводит к цели, если указанные n векторов линейно независимы, т. е. если исходная система (1) совместна.

Полагая $C = \Lambda U$, мы видим, что

$$C^{-1} = U^* \Lambda^{-1} = U^* \Lambda^* \Lambda^{*-1} \Lambda^{-1} = C^* \Lambda^{-2}. \tag{16}$$

Вычисляя диагональные элементы матрицы Λ^{-2} по формуле

$$l_{ii} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2}, \tag{17}$$

мы имеем окончательно

$$x = C^* \Lambda^{-2} d. \tag{18}$$

Таблица 1

Метод решения	Число сложений	Число умножений	Число нахождений обратной величины	Число извлечений квадратного корня
Указанный в работе	n^3	n^3	n	—
Метод Айкена [4]	$n^3/3$	$n^3/3$	n	—
Метод исключения с использованием обратной подстановки	$n^3/3$	$n^3/3$	n	—
Метод Холецкого	$n^3/6$	$n^3/6$	n	n
Метод ортогональных векторов	n^3	n^3	n	—

В табл. 1 указано число арифметических операций, требуемое при различных методах решения системы из n совместных линейных алгебраических уравнений. При этом мы берем только главные члены в формулах, выражающих соответствующее число операций.

Рассмотрим теперь второй вариант вычислительной схемы, служащий для нахождения элементов обратной матрицы.

Вся часть, служащая для вычисления матрицы C, остается прежней. Далее, мы составляем матрицу B, элементы которой суть

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad j > i; \\ 1, & \text{если} \quad j = i; \\ \mu_j^{(i)} & \text{если} \quad j < i \end{cases}$$

(числа $\mu_j^{(i)}$ определены формулой (12)).

Теперь мы имеем, согласно (5) и (16),

$$A^{-1} = U^{*}\Lambda^{-1}B = C^{*}\Lambda^{-2}B. \tag{19}$$

Таким образом, кроме проведенных выше вычислений, нужно лишь произвести одно перемножение матриц.

В заключение я выражаю искреннюю признательность И. С. Бруку и И. М. Гельфанду за обсуждение результатов этой работы.

Поступило
31 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М.—Л., 1948. [2] L. Fox, H. D. Huskey and J. H. Wilkinson, Quart. Journ. of Mech. Appl. Math., 149 (1948); Русск. пер. Усп. матем. наук, **5**, в. 3 (37), 66 (1950). [3] Д. П. Гроссман, Усп. матем. наук, **5**, в. 3 (37), 87 (1950). [4] F. M. Verzuh, Math. Tables, **3**, No. 27, 1949, стр. 453—462. [5] Olga Taussky, Math. Tables, **4**. No. 30, 1950, стр. 111.