Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

М. Ф. ТИМАН

# О $(C, \alpha, \beta)$-СУММИРУЕМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 15 XII 1950)*

В этой заметке приводятся некоторые теоремы относительно взаимосвязи различных методов суммирования $(C, \alpha, \beta)$ $(\alpha > -1, \beta > -1)$ между собой, а также относительно их сравнимости с методом $(A)$ для двойных рядов. Обозначения заимствованы из [3].

Теорема 1. *Пусть ряд* $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_{mn}$ *суммируем* $(C, \alpha, \beta)$ $(\alpha, \beta > -1)$ *к* $S$ *и, при некоторых* $\gamma \geqslant 0$ *и* $\delta \geqslant 0$ *таких, что* $\gamma\delta \leqslant (\alpha+1)(\beta+1)$, *выполняются условия:*

$$\begin{aligned} &\sigma_{mn}^{\alpha, \beta} = o(m^\gamma) \text{ при любом фиксированном } n, \\ &\sigma_{mn}^{\alpha, \beta} = o(n^\delta) \text{ при любом фиксированном } m. \end{aligned} \tag{1}$$

*Тогда двойной степенной ряд*

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} U_{mn}\, x^m y^n \tag{2}$$

*для* $|x| < 1$, $|y| < 1$ *абсолютно сходится и*

$$\lim f(x, y) = S, \tag{3}$$

*когда* $x$ *и* $y$, *стремясь к единице, при некотором* $\lambda \geqslant 1$ *удовлетворяют условию:*

$$\frac{1}{\lambda}(1-y)^{\frac{\beta+1}{\gamma}} \leqslant 1 - x \leqslant \lambda (1-y)^{\frac{\delta}{\alpha+1}}. \tag{4}$$

*Ни в одном из условий* (1) $o$ *нельзя заменить на* $O$.

Частные случаи этой теоремы, соответствующие $\gamma = \beta + 1$, $\delta = \alpha + 1$ и $\gamma = \alpha + 1$, $\delta = \beta + 1$, были установлены в [3] (см. также [1,2], где рассматривались случаи $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = \delta = 1$ и $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = \delta = 2$).

Доказательство первой части этого утверждения мы опускаем. Оно может быть проведено аналогично доказательству теоремы 1 в [3].

Покажем, что теорема теряет силу, если в условиях (1) $o$ заменить на $O$. Для этого рассмотрим ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(A_m^{-\alpha-2} A_n^{\delta-1} + A_m^{\gamma-1} A_n^{-\beta-2}). \tag{5}$$

Легко видеть, что $\sigma_{mn}^{\alpha, \beta} \underset{m, n \to \infty}{\to} 0$, $\sigma_{mn}^{\alpha, \beta} = O(m^{\gamma})$ при любом фиксированном $n$; $\sigma_{mn}^{\alpha, \beta} = O(n^{\delta})$ при любом фиксированном $m$.

Между тем, функция $f(x, y)$ при $x$ и $y$, удовлетворяющих условию (4) и стремящихся к единице, предела не имеет.

Следующий пример показывает, что при выполнении всех условий теоремы предел $f(x, y)$ может не существовать, когда $x$ и $y$ стремятся к единице произвольно.

Рассмотрим ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} U_{mn}$ с общим членом вида

$$U_{mn} = A_m^{-\alpha-2} A_n^{\delta-\mu-1} + A_m^{\gamma-\rho-1} A_n^{-\beta-2}, \tag{6}$$

где $0 < \mu < \delta$, $0 < \rho < \gamma$.

Очевидно, $\sigma_{mn}^{\alpha, \beta} \underset{m, n \to \infty}{\to} 0$, $\sigma_{mn}^{\alpha, \beta} = o(m^{\gamma})$ при любом фиксированном $n$, $\sigma_{mn}^{\alpha, \beta} = o(n^{\delta})$ при любом фиксированном $m$.

Однако построенная согласно (2) функция $f(x, y)$ предела не имеет при произвольном стремлении $x$ и $y$ к 1.

Этот же пример вместе с рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} A_m^{\alpha} A_n^{\beta} \tag{7}$$

показывает несравнимость методов $(C, \alpha, \beta)$ и $(A)$.

Пусть $C_0(\alpha, \beta)$ есть множество двойных рядов, суммируемых $(C, \alpha, \beta)$ $(\alpha, \beta > -1)$ и удовлетворяющих условиям:

$$\overline{\lim} \frac{\ln\left(\left|\sigma_{mn}^{\alpha, \beta}\right| + 1\right)}{\ln m} < \infty \text{ при любом фиксированном } n,$$

$$\overline{\lim} \frac{\ln\left(\left|\sigma_{mn}^{\alpha, \beta}\right| + 1\right)}{\ln n} < \infty \text{ при любом фиксированном } m.$$

Пусть, далее, $C_0$ есть класс двойных рядов, принадлежащих, по крайней мере, к одной из совокупностей $C_0(\alpha, \beta)$, т. е.

$$C_0 = \bigcup_{(\alpha, \beta)} C_0(\alpha, \beta).$$

Через $A$ обозначается класс двойных рядов, суммируемых методом Абеля.

Следующая теорема в известном смысле дополняет теорему 1.

Теорема 2. *Классы $C_0$ и $A$ несравнимы.*

В справедливости этого утверждения убеждаемся, рассматривая, с одной стороны, примеры (5) и (6), иллюстрирующие теорему 1, и с другой стороны, ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} U_{mn}$, где

$$U_{mn} = (-1)^{m+n} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_m^i A_n^j}{i!\, j!}.$$

Данный ряд, как можно показать, не принадлежит классу $C_0$, хотя суммируем методом Абеля.

Ниже мы приводим теорему, указывающую на специфическую особенность чезаровского метода суммирования для двойных рядов.

Теорема 3. *Методы* $(C, \alpha, \beta)$ $(\alpha, \beta > -1)$ *несравнимы между собой.*

В связи с этим, как нам кажется, представляет интерес следующее предложение, указывающее на ограниченную регулярность метода $(C, \alpha, \beta)$ $(\alpha, \beta > -1)$.

Теорема 4. *Пусть ряд* $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} U_{mn}$ *суммируем* $(C, \alpha, \beta)$ $(\alpha, \beta > -1)$ *к* $S$ *и, при некоторых* $\gamma \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$ *таких, что* $\gamma\delta \leqslant (\alpha+1)(\beta+1)$, *выполняются условия*:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{mn}^{\alpha, \beta} = o(m^{\gamma}) \text{ при любом фиксированном } n, \\ &\sigma_{mn}^{\alpha, \beta} = o(n^{\delta}) \text{ при любом фиксированном } m. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

*Тогда, при любых* $\alpha' \geqslant \alpha$ *и* $\beta' \geqslant \beta$,

$$\lim \sigma_{mn}^{\alpha', \beta'} = S \qquad (\alpha' > -1,\ \beta' > -1), \tag{9}$$

*если* $m$ *и* $n$, *стремясь к* $\infty$, *при некоторых* $K_1 > 0$ *и* $K_2 > 0$ *удовлетворяют условию*

$$K_1 |\alpha - \alpha'|\, n^{\frac{\delta}{\alpha+1}} \leqslant m \leqslant \frac{K_2}{|\beta - \beta'|}\, n^{\frac{\beta+1}{\gamma}}. \tag{10}$$

*Ни в одном из условий* (8) $o$ *нельзя заменить на* $O$.

Пример ряда с общим членом (6) показывает, что теорема 4 может не иметь места при произвольном стремлении $m$ и $n$ к $\infty$.

К теореме 4 примыкает следующее предложение.

Теорема 5. *Пусть ряд* $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} U_{mn}$ *суммируем* $(C, \alpha, \beta)$ $(\alpha, \beta > -1)$ *к* $S$. *Пусть, кроме того, для некоторых* $-1 < \alpha' < \alpha$, $-1 < \beta' < \beta$, $|\sigma_{mn}^{\alpha', \beta'}| \leqslant M$ *для всех* $m$ *и* $n$. *Тогда, при любых* $p > 0$, $q > 0$, *данный ряд суммируем* $(C, \alpha' + p, \beta' + q)$ *к* $S$.

Следствие. Если частные суммы ряда $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} U_{mn}$ ограничены, т. е. $|S_{mn}| \leqslant M$ для всех $m$ и $n$, то он суммируем либо не суммируем методом $(C, \alpha, \beta)$ для всех $\alpha > 0$, $\beta > 0$ одновременно.

Поступило
30 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Челидзе, ДАН, 53, № 8 (1946). [2] В. Г. Челидзе, Докл. АН Груз. ССР, 8, № 6 (1947). [3] М. Ф. Тиман, ДАН, 60, № 7 (1948).