Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

Д. М. СМИРНОВ

К ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНО-НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 12 XII 1950)

Согласно общепринятой терминологии, под локально-нильпотентной группой будем понимать такую группу, любое конечное множество элементов которой порождает в ней нильпотентную подгруппу (т. е. конечную или бесконечную группу, обладающую центральным рядом конечной длины). В настоящей заметке рассматриваются некоторые свойства локально-нильпотентных групп.

§ 1. Подгруппа H произвольной группы G будет называться инфра-инвариантной в G, если при любом внутреннем автоморфизме φ группы G или $\varphi(H)\subseteq H$ или же $\varphi(H)\supseteq H$, другими словами, если все подгруппы, сопряженные с H в G, образуют упорядоченное по теоретико-множественному включению множество [1]. Легко показать, что в случае периодических групп понятие инфра-инвариантной подгруппы совпадает с понятием нормального делителя. Справедливо также следующее утверждение.

Теорема 1. *Всякая инфра-инвариантная подгруппа H локально нильпотентной группы G является нормальным делителем этой группы.*

Из теоремы 1 и результатов А. И. Мальцева [2] непосредственно вытекает такое следствие.

Следствие. *В упорядоченной локально-нильпотентной группе всякая выпуклая подгруппа инвариантна.*

Заметим, что утверждение теоремы 1 для ZD-групп несправедливо. Именно, группа G с образующими a, b и определяющим соотношением $ba=a^2b$ содержит бесконечную циклическую подгруппу $A=\{a\}$, порожденную элементом a. Подгруппа A инфра-инвариантна в G и в то же время не является нормальным делителем этой группы. Следовательно, свободная группа F, порожденная свободными образующими a, b, также обладает инфра-инвариантной подгруппой, не являющейся нормальным делителем группы F. Однако, по теореме Магнуса F есть ZD-группа.

Теорема 2. *Группа G, все циклические подгруппы которой инфра-инвариантны, является гамильтоновой.*

Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из теоремы 1 и следующей леммы.

Лемма 1. *Коммутант K группы G, все циклические подгруппы которой инфра-инвариантны, содержится в ее центре.*

§ 2. Для смешанных ZA-групп, длины верхних центральных рядов которых не превосходят первого предельного порядкового числа ω, имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. *Если группа G обладает верхним центральным рядом $Z_0 = 1 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n \subset \ldots$, $\bigcup Z_n = G$, и максимальная периодическая подгруппа P_n / Z_{n-1} каждого фактора Z_n / Z_{n-1} этого ряда при $n \geqslant 2$ есть группа с условием минимальности для подгрупп, то из конечности центра Z_1 группы G следует конечность самой группы G.*

Доказательство этого утверждения можно получить из формулируемой ниже леммы 2 и теоремы 4 Х. Х. Мухаммеджана [3].

Лемма 2. *Если группа G обладает верхним центральным рядом $Z_0 = 1 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n \subset \ldots$, $\bigcup Z_n = G$, и максимальная периодическая подгруппа P_n / Z_{n-1} каждой группы Z_n / Z_{n-1} $(n = 1, 2, \ldots)$ конечна, то при $n \geqslant 2$ группа P_n состоит из тех и только тех элементов x группы G, для каждого из которых коммутатор $[x, g] = x^{-1} g^{-1} xg$ принадлежит группе P_{n-1} при любом g из G.*

Пусть группа G обладает верхним центральным рядом $Z_0 = 1 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_\gamma = G$, $\gamma \leqslant \omega$, максимальные периодические подгруппы всех факторов которого являются группами с условием минимальности для подгрупп. Естественно возникает вопрос, следует ли при этих условиях из периодичности центра Z_1 группы G периодичность самой группы G. Следующий пример показывает, что этот вопрос в общем виде решается отрицательно.

Пример. Пусть P есть группа типа 2^∞, заданная системой образующих $c_1, \ldots, c_k, \ldots$ и системой определяющих соотношений $c_1^2 = 1$, $c_{k+1}^2 = c_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Элементы $a_1, \ldots, a_m, \ldots$, удовлетворяющие соотношениям $a_{m+1}^{m+1} = a_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, порождают группу A, изоморфную аддитивной группе рациональных чисел. Обозначим через $H = P \times A$ прямое произведение групп P и A. Если m, n — два заданных натуральных числа и $m!\, n! = r \cdot 2^l$, где число r нечетно, то через u обозначим решение сравнения $ru \equiv 1 \pmod{2^{l+1}}$.

Присоединим к группе H элементы $b_1, \ldots, b_n, \ldots$, подчинив их следующим соотношениям:

$$b_{n+1}^{n+1} = b_n, \quad b_n c_k = c_k b_n, \quad a_m b_n = b_n a_m c_{l+1}^u \quad (k, m, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Полученную группу обозначим через G. Нетрудно убедиться, что центром группы G служит квази-циклическая группа P (типа 2^∞), в то время как фактор-группа G / P по нему является полной абелевой группой без кручения ранга 2.

По аналогии для ZA-групп без кручения можно поставить следующий вопрос: пусть группа без кручения G обладает верхним центральным рядом, длина которого не превосходит первого предельного порядкового числа ω. Следует ли при этом из полноты центра Z группы G полнота самой группы G? Ответ на этот вопрос также отрицательный. Тем не менее, можно утверждать следующее:

Теорема 4. *Если группа без кручения G обладает верхним центральным рядом $Z_0 = 1 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_\gamma = G$, $\gamma \leqslant \omega$, и ее центр Z_1 не содержит полных подгрупп, то группа G и все факторы ее верхнего центрального ряда также не имеют полных подгрупп.*

При этом единичная подгруппа в расчет не принимается.

Теорема 5. *Если группа G обладает верхним центральным рядом $Z_0 = 1 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n \subset \ldots$, $\bigcup Z_n = G$, с абелевыми факторами типа A_4, то этот ряд заканчивается группой G через конечное число шагов *.*

* Здесь и ниже при рассмотрении абелевых групп мы придерживаемся классификации, данной А. И. Мальцевым [4].

Доказательство этой теоремы существенно опирается на лемму 2. Справедливо ли утверждение теоремы 5, когда все факторы верхнего центрального ряда группы G имеют тип A_3, автору осталось неизвестным.

Отметим следующий результат.

Абелеву группу типа A_3, фактор-группа которой по максимальной периодической части полна, будем называть группой типа A_3^*.

Теорема 6. *Если группа G обладает верхним центральным рядом $Z_0 = 1 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n \subset \ldots, \bigcup Z_n = G$, все факторы которого имеют тип A_3^*, то этот ряд заканчивается группой G через конечное число шагов.*

Доказательство этого утверждения можно получить из теоремы 5 и следующей леммы.

Лемма 3. *Если группа G обладает верхним центральным рядом $Z_0 = 1 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_\alpha \subset \cdots \subset Z_\gamma = G$ с абелевыми факторами типа A_3^*, то максимальная периодическая подгруппа Z_2 / Z_1 конечна.*

В некоторых случаях весьма сильными оказываются ограничения, накладываемые на абелевы подгруппы того или иного класса групп. Локально-нильпотентные группы при ограничениях такого рода изучены А. И. Мальцевым ([4]). Опираясь на эти результаты, можно доказать следующее предложение, являющееся обобщением теоремы 4 Н. Ф. Сесекина ([5]).

Теорема 7. *Специальная* ([6]) *группа G, все абелевы подгруппы которой имеют тип A_4, является нильпотентной A_4-группой.*

§ 3. Укажем еще одно обобщение результата В. М. Глушкова ([7]) о нормализаторах сервантных подгрупп ZA-групп без кручения.

Теорема 8. *В локально-нильпотентной группе без кручения G нормализатор N любой ее сервантной подгруппы H сервантен.*

Из результатов ([8]) А. И. Мальцева и теоремы 8 непосредственно вытекают следующие предложения.

Следствие 1. В полной локально-нильпотентной группе без кручения G нормализатор N любой ее полной подгруппы H полон.

Следствие 2. Если G^* есть пополнение локально-нильпотентной группы без кручения G, H — сервантная подгруппа группы G и N — нормализатор подгруппы H в G, то пополнение N^* группы N будет нормализатором в G^* пополнения H^* группы H.

Следствие 3. Пусть G есть полная локально-нильпотентная группа без кручения, H — ее полная подгруппа и N — нормализатор подгруппы H в G. Если $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$ суть рациональные алгебры Ли соответственно групп G, N, H, то $\mathfrak{N}$ является нормализаторной подалгеброй алгебры $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$.

В заключение сформулируем следующие результаты, касающиеся локально разрешимых групп*.

Теорема 9. *Всякая локально-разрешимая подгруппа группы автоморфизмов разрешимой A_5-группы R является разрешимой A_5-группой.*

Отсюда следует, что если хотя бы одна максимальная абелева подгруппа A локально-разрешимой группы G содержится в некотором ее разрешимом нормальном делителе R типа A_5, то G есть разрешимая A_5-группа.

Теорема 10. *Всякая локально-разрешимая подгруппа группы автоморфизмов разрешимой A_3-группы R разрешима.*

---

* Под локально-разрешимой группой мы понимаем такую группу G, любое конечное множество элементов которой порождает в ней разрешимую подгруппу. Локальная конечность группы G при этом не предполагается.

Следовательно, если хотя бы одна максимальная абелева подгруппа A локально-разрешимой группы G содержится в некотором ее разрешимом нормальном делителе R типа A_3, то группа G разрешима.

Доказательства предложений 9, 10 существенно опираются на теорему 2 и лемму работы ([4]) А. И. Мальцева.

В дополнение к утверждению теоремы 10 заметим, что разрешимая группа автоморфизмов разрешимой A_3-группы не обязана быть A_3-группой.

Автор выражает благодарность А. И. Мальцеву за ряд ценных указаний.

Ивановский государственный педагогический институт

Поступило 26 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Krasner, C. R., 208, 1867 (1939). [2] А. И. Мальцев, Изв. АН СССР. сер. матем., 13, 473 (1949). [3] Х. Х. Мухаммеджан, ДАН, 65, № 3 (1949), [4] А. И. Мальцев, ДАН, 67, № 1 (1949). [5] Н. Ф. Сесекин, ДАН, 70, № 2 (1950). [6] О. Ю. Шмидт, Матем. сборн., 8 (50): 3, 363 (1940). [7] В. М. Глушков, ДАН, 71, № 3 (1950). [8] А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, 201 (1949).