Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 5

*МАТЕМАТИКА*

Б. И. ПЛОТКИН

# К ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНО-НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

*(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 12 XII 1950)*

Как известно (1), группа $\mathfrak{G}$ называется локально-нильпотентной, если всякое конечное множество ее элементов содержится в некоторой нильпотентной подгруппе, т. е. в подгруппе, обладающей конечным центральным рядом.

А. И. Мальцевым (2) доказано, что если группа обладает возрастающим центральным рядом, то она локально-нильпотентна.

В настоящей заметке мы доказываем, что группа, удовлетворяющая нормализаторному условию (т. е. группа, специальная в смысле О. Ю. Шмидта), локально-нильпотентна. Этот факт может представлять интерес в связи с известной проблемой (3): будет ли всякая группа, удовлетворяющая нормализаторному условию, обладать возрастающим центральным рядом. Для групп с конечным числом образующих положительное решение этой проблемы следует из доказываемой ниже теоремы.

Теорема. *Группа $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая нормализаторному условию, локально-нильпотентна.*

Докажем ряд вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет нормализаторному условию, $g$ и $x$ — элементы из $\mathfrak{G}$. Составим последовательность элементов*

$$x_1 = x,\ x_2, \ldots, x_k, \ldots \tag{*}$$

*по следующему закону:*

$$x_{i+1} = g x_i g^{-1} x_i^{-1}.$$

*Тогда существует такой номер $N$, что, начиная с этого номера, все $x_n$ равны единице группы.*

Доказательство*. Пусть $A$ — циклическая подгруппа, порожденная элементом $g$: $A = \{g\}$. Через $A = A_1$ проведем возрастающий нормальный ряд группы $\mathfrak{G}$:

$$1 = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset \ldots \subset A_\gamma = \mathfrak{G}, \tag{**}$$

где $A_{\alpha+1}$ — нормализатор $A_\alpha$: $A_{\alpha+1} = N(A_\alpha)$.

Этот ряд обладает следующим свойством: если $f$ — произвольный элемент группы $\mathfrak{G}$ и $f \in A_{\alpha+1}$, то $gfg^{-1}f^{-1} \in A_\alpha$. Действительно: для

* П. Г. Конторович обратил мое внимание на тот факт, что конечность последовательности ( * ) является достаточным условием для того, чтобы конечная группа была специальной. В связи с этим и возникла идея приводимого доказательства.

любого $\alpha$ $g \in A_\alpha$ и $f$ принадлежит нормализатору $A_\alpha$. Поэтому $g, fg^{-1}f^{-1}$ и их произведение $gfg^{-1}f^{-1}$ принадлежат $A_\alpha$.

Пусть теперь $x$ — элемент, для которого мы доказываем лемму, и пусть $x_i \in A_{\alpha_i}$, где $x_i$ — элементы последовательности (*), а $A_{\alpha_i}$ — наименьший член ряда (**), содержащий $x_i$. Из предыдущего замечания следует что ряд,

$$A_{\alpha_i} \supset A_{\alpha_2} \supset \ldots \supset A_{\alpha_k} \supset \ldots \qquad (***)$$

будет строго убывающим рядом. Так как ряд (**) вполне упорядочен, то ряд (***) на конечном номере достигает циклической группы $A$. Очевидно, что если $x_N \in A$, то $gx_Ng^{-1}x_N^{-1} = 1$, и лемма доказана.

Условимся дальше через $K(g, x)$ обозначать подгруппу, порожденную членами последовательности ( * ). $K(g, x)$ имеет конечное число образующих и инвариантна относительно элемента $g$. Последнее следует из того, что для любого образующего элемента $x_i$ будет $gx_ig^{-1} = x_{i+1}x_i$.

Лемма 2. *Пусть $H$ — инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей нормализаторному условию.*

*Тогда, если $H$ обладает нетривиальным центром и $\mathfrak{G}/H$ — циклическая группа, то и $\mathfrak{G}$ обладает нетривиальным центром.*

Этот результат содержится в работе О. Ю. Шмидта [4].

Из него получается

Лемма 3. *Пусть $H$ — инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей нормализаторному условию.*

*Тогда, если $H$ обладает возрастающим центральным рядом и $\mathfrak{G}/H$ — циклическая группа, то и $\mathfrak{G}$ обладает возрастающим центральным рядом.*

Доказательство. Существование центра $Z = Z_1$, отличного от единицы, следует из предыдущей леммы. Пусть в $\mathfrak{G}$ уже построены все гиперцентры $Z_\alpha$ для $\alpha < \beta$. Если $\beta$ — предельное порядковое число, то $Z_\beta$ является объединением всех $Z_\alpha$ при $\alpha < \beta$. Пусть $\beta$ — непредельное порядковое число. Гиперцентр $Z_{\beta-1}$, по предположению, уже построен. Группа $\mathfrak{G}/Z_{\beta-1}$ является циклическим расширением своей инвариантной подгруппы $HZ_{\beta-1}/Z_{\beta-1}$. Из $HZ_{\beta-1}/Z_{\beta-1} \approx H/H \cap Z_{\beta-1}$ следует, что $HZ_{\beta-1}/Z_{\beta-1}$ обладает нетривиальным центром, так как $H$ обладает возрастающим центральным рядом. Мы снова возвращаемся к условиям предыдущей леммы, и поэтому существует гиперцентр $Z_\beta$. Процесс может быть продолжен до тех пор, пока мы не дойдем до $\mathfrak{G}$.

Следующая лемма является основной для доказательства сформулированной теоремы.

Лемма 4. *Пусть $H$ — локально-нильпотентная инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей нормализаторному условию.*

*Тогда, если $\mathfrak{G} = \{H, g\}$, где $g \in \mathfrak{G}$, то и $\mathfrak{G}$ локально-нильпотентна.*

Доказательство. Возьмем конечное множество элементов из $\mathfrak{G}$: $g^{n_1}h_1, g^{n_2}h_2, \ldots, g^{n_s}h_s$, где $h_i \in H$. Очевидно, подгруппа, порожденная этими элементами, содержится в подгруппе, порожденной элементами $g, h_1, \ldots, h_s$. Для каждого $h_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, построим подгруппы $K(g, h_i)$, как в лемме 1. Все $K(g, h_i)$ содержатся в $H$. Через $F$ обозначим подгруппу, порожденную всеми $K(g, h_i)$: $F = \{K(g, h_1), \ldots, K(g, h_s)\}$.

Из построения следует, что подгруппа $F$ содержится в $H$, имеет конечное число образующих и инвариантна относительно элемента $g$. Из первых двух свойств следует, что $F$ обладает возрастающим центральным рядом, так как, по условию, $H$ локально-нильпотентна. Из инвариантности $F$ относительно $g$ и из леммы 3 следует, что подгруппа $F' = \{F, g\}$ обладает возрастающим центральным рядом. Таким образом, элементы $g^{n_1} h_1, g^{n_2} h_2, \ldots, g^{n_s} h_s$ содержатся в некоторой подгруппе, обладающей возрастающим центральным рядом.

На основании теоремы А. И. Мальцева ([2]), эти элементы содержатся в некоторой нильпотентной подгруппе.

Так как мы рассмотрели произвольное конечное множество элементов из $\mathfrak{G}$, то лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы.

Пусть группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет нормализаторному условию. Построим в $\mathfrak{G}$ возрастающий нормальный ряд:

$$1 = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\alpha \subset \ldots \subset H_\gamma = \mathfrak{G} \qquad (****)$$

такой, что $H_1$ — циклическая подгруппа, а $H_{\alpha+1} = \{H_\alpha, g_\alpha\}$, где $g_\alpha$ — не лежащий в $H_\alpha$ элемент нормализатора $H_\alpha$.

Такой ряд существует и доходит до $\mathfrak{G}$, так как $\mathfrak{G}$ удовлетворяет нормализаторному условию. Локальную нильпотентность группы $\mathfrak{G}$ мы будем доказывать индукцией по длине ряда (****).

$H_1$ — локально-нильпотентная группа. Пусть уже доказано для всех $\alpha < \beta$, что $H_\alpha$ — локально-нильпотентные группы. Если $\beta$ — предельное порядковое число, то локальная нильпотентность $H_\beta$ очевидна.

Пусть $\beta$ непредельное. $H_{\beta-1}$, по предположению, локально-нильпотентная группа. Так как $H_\beta = \{H_{\beta-1}, g_{\beta-1}\}$, то, по лемме 4, и $H_\beta$ локально-нильпотентна. Продолжая рассуждения, мы докажем, что и группа $\mathfrak{G} = H_\gamma$ локально-нильпотентна.

Теорема доказана.

Следствие 1. Группа $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих, удовлетворяющая нормализаторному условию, нильпотентна.

Таким образом, проблема XXI из статьи А. Г. Куроша и С. Н. Черникова ([3]) для групп с конечным числом образующих решается положительно.

Следствие 2. Нециклическая группа, удовлетворяющая нормализаторному условию, обладает нетривиальным нормальным делителем.

Это следует из локальных теорем А. И. Мальцева ([3]) (см. также О. Ю. Шмидт ([5])) и доказанной теоремы.

Из следствия 2 вытекает положительное решение проблемы XXIII из статьи ([3]).

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
16 IX 1950

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Курош, Теория групп, 1944. [2] А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, 201 (1949). [3] А. Г. Курош и С. Н. Черников, Усп. матем. наук, **2**, в. 3, 18 (1947). [4] О. Ю. Шмидт, Матем. сборн., **8** (50) : 3, 363 (1940). [5] О. Ю. Шмидт, там же, **17** (59), 145 (1945).

## ПОПРАВКА

В статье, помещенной в ДАН, т. LXXIII, № 4 (1950 г.), на стр. 655, строка 1 инициалы автора напечатаны неправильно. Следует читать: Б. И. ПЛОТКИН.