Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

И. И. ОГИЕВЕЦКИЙ

О МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 19 XII 1950)

Положим $t_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^m k\alpha_n$, m — целое, $\alpha_n = \frac{\pi}{2n+1}$. Если $\lim_{n\to\infty} t_n = s$, то говорят, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ суммируется методом $(Б, m)$ к s [1, 3].

Лемма 1. *Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ суммируется методом (C, r), $r > -1$, к s, то он суммируется методом $(Б, m)$ к тому же числу s, где m — ближайшее целое, большее r.*

Очевидно, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ суммируется методом (C, m) к s. Применяя преобразование Абеля $(m+1)$ раз, получим

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^m k\alpha_n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-(m+1)} s_k^{(m)} \Delta_{m+1} \cos^m k\alpha_n + \sum_{k=0}^{m} s_{n-k}^{(k)} \Delta_k \cos^m (n-k)\alpha_n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-(m+1)} \sigma_k^{(m)} A_k^m \Delta_{m+1} \cos^m k\alpha_n + \sum_{k=0}^{m} \sigma_{n-k}^{(k)} A_{n-k}^k \Delta_k \cos^m (n-k)\alpha_n, \quad (1)$$

где $s_k^{(m)}$ — чезаровская сумма порядка m ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$; $\sigma_k^{(m)}$ — чезаровское среднее порядка m ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$,

$$\Delta_p \cos^m k\alpha_n = \Delta_{p-1} \cos^m k\alpha_n - \Delta_{p-1} \cos^m (k+1)\alpha_n, \; p = 1, 2, \ldots;$$

$$\Delta_0 \cos^m k\alpha_n = \cos^m k\alpha_n; \quad A_k^{(p)} = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+k)}{k!} = O(k^p). \quad (2)$$

Так как $2^m \cos^m k\alpha_n = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} e^{ik\alpha_n (m-2j)}$, то $2^m \Delta_p \cos^m k\alpha_n = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \Delta_p e^{ik\alpha_n (m-2j)}$. Но, вследствие (2),

$$\Delta_p e^{ikm\alpha_n} = e^{im\alpha_n \left(k+\frac{p}{2}\right) - \frac{i\pi p}{p}} \left[2 \sin \frac{m\alpha_n}{2}\right]^p. \quad (3)$$

Отсюда

$$2^m \Delta_p \cos m\alpha_n = e^{im\alpha_n \left\{k+\frac{p}{2}\right\} - \frac{i\pi p}{2}} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \left[2 \sin \frac{(m-2j)\alpha_n}{2}\right]^p e^{-2ij\alpha_n \left(\frac{p}{2}\right)}. \quad (4)$$

Так как $\alpha_n = O(1/n)$, то

$$|\Delta_p \cos^m k\alpha_n| = O(1/n^p), \quad p = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Используя (4), получим

$$2^m \Delta_k \cos^m (n-k)\alpha_n = e^{im\alpha_n\left(n-\frac{k}{2}\right)-\frac{i\pi k}{2}} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} e^{-2ij\alpha_n\left(n-\frac{k}{2}\right)} \left[2\sin\frac{(m-2j)\alpha_n}{2}\right]^k,$$

$$k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{6}$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} \binom{m}{j} e^{-2ij\alpha_n\left(n-\frac{k}{2}\right)} \left[2\sin\frac{(m-2j)\alpha_n}{2}\right]^k}{\left[2\sin\frac{m\alpha_n}{2}\right]^k} = \frac{1}{m^k}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j (m-2j)^k \binom{m}{j} =$$

$$= \frac{1}{m^k}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \binom{m}{j} \sum_{i=0}^{k} A_i j^i = \frac{1}{m^k}\sum_{l=0}^{k} A_i \left\{\sum_{j=0}^{k}(-1)^j j^i \binom{m}{j}\right\} = 0 \tag{6'}$$

ввиду того, что $\sum\limits_{j=0}^{m} (-1)^j j^i \binom{m}{j} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1.$

Из (6), (6') и $\alpha_n = O(1/n)$ следует, что

$$|\Delta_k \cos^m (n-k)\alpha_n| = O(1/n^k)\, o(1), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{7}$$

Из (3) и (5) вытекает

$$\sum_{k=0}^{m} A_k^m |\Delta_{m+1} \cos^m k\alpha_n| \leqslant M \quad (M \text{ не зависит от } n). \tag{8}$$

Для ряда $1 + 0 + 0 + \ldots$ $\sigma_n^{(m)} = 1$, $n = 0, 1, \ldots$ Подставляя в (1):

$$1 = \sum_{k=0}^{n-(m+1)} A_k^m \Delta_{m+1} \cos^m k\alpha_n + \sum_{k=0}^{m} A_{n-k}^k \Delta_k \cos^m (n-k)\alpha_n; \tag{9}$$

умножив обе части (8) на s и вычитая из (1), получим

$$t_n - s = \sum_{k=0}^{n-(m+1)} (\sigma_k^{(m)} - s) A_k^m \Delta_{m+1} \cos^m k\alpha_n +$$

$$+ (\sigma_{n-m}^{(m)} - s) A_{n-m}^m \Delta_m \cos^m (n-m)\alpha_n +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} s_{n-k}^k \Delta_k \cos^m (n-k)\alpha_n - s\sum_{k=0}^{m-1} A_{n-k}^k \Delta_k \cos^m (n-k)\alpha_n. \tag{10}$$

Выберем такое n_0, что для $k > n_0$ $|\sigma_k^{(m)} - s| < \varepsilon/8M$, и такое N, что при $n > N$ $|\Delta_{m+1} \cos^m k\alpha_n| < \varepsilon/8(n_0+1)\,LD$, $k = 0, 1, \ldots, n_0$, где $L = \max\{A_k^{(m)}\}$, $k = 0, 1, \ldots, n_0$; $|\sigma_k^{(m)} - s| < D$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Тогда для всех $n > N$, вследствие (8),

$$\left|\sum_{k=0}^{n_0} (\sigma_k^{(m)} - s) A_k^m \Delta_{m+1} \cos^m k\alpha_n\right| < \frac{\varepsilon}{8}, \quad \left|\sum_{k=n_0+1}^{n-(m+1)}\right| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^{(m)} = s$, то [4]

$$s_{n-k}^k = o[(n-k)^m], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m-1. \tag{11}$$

Вследствие суммируемости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ в смысле (C, m) и (5) найдется такое P, что при $n > P$ второй член в (10) будет меньше $\varepsilon/4$;

из (7) и (11) следует, что найдется такое Q, что при $n > Q$ третий член в (10) будет меньше $\varepsilon/4$; из (3) и (7) — найдется такое R, что при $n > R$ четвертый член в (10) меньше $\varepsilon/4$. Отсюда для всех $n > \max(N, P, Q, R)$ $|t_n - s| < \varepsilon$. Для частного случая $m = 2$ этот результат был установлен Харшиладзе ([2]).

Следствие. Метод суммирования $(Б, m)$ регулярен.

Действительно, вследствие леммы 1 и регулярности метода Чезаро, предполагая ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходящимся, будем иметь

$$(Б,\ m) \lim \sum_{k=0}^{\infty} a_k = (C,\ r) \lim \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Теорема 1. *Метод суммирования $(Б,\ m+1)$ сильнее метода суммирования (C, r), $r > -1$, где m — наименьшее целое, большее r.*

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ с последовательностью гельдеровских средних $H_0^{(m)} = 1$, $H_1^{(m)} = 0$, $H_2^{(m)} = 1, \ldots$ Последовательность гельдеровских средних $(m+1)$-го порядка ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ $H_n^{(m+1)} = \dfrac{H_0^{(m)} + H_1^{(m)} + \ldots + H_n^{(m)}}{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, сходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ не суммируется методом (H, m), но суммируется методом $(H, m+1)$. Так как метод Гельдера эквивалентен методу Чезаро, то отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ не суммируется методом (H, m), но суммируется методом $(H, m+1)$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ также не суммируется методом (C, r) (так как $m \geqslant r$), но, вследствие доказанной леммы, суммируется методом $(Б, m+1)$. Так как, с другой стороны, вследствие этой же леммы, любой ряд, суммируемый (C, r), суммируется $(Б, m+1)$, то метод суммирования $(Б, m+1)$ сильнее метода (C, r), $r > -1$.

Определение. Последовательность $s_0, s_1, s_2, \ldots$ суммируется методом $(MC, 1)$ ([3]) к s, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = s$, где

$$t_n = {}^1/_2 (\sigma_n + \sigma_{n+1}), \qquad \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu. \tag{12}$$

Лемма 2. *Если последовательность $s_0, s_1, s_2, \ldots$ суммируется методом $(MC, 1)$ к s то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k} = 0.$$

Действительно, из (12) следует

$$\frac{s_n}{n} = 4(-1)^n \{t_1 - t_2 + \ldots + (-1)^{n-3} t_{n-2}\} + 2t_{n-1} + 2(-1)^{n+1}\sigma_1 -$$
$$- 2(-1)^n \left\{\frac{t_1 - t_2 + \ldots + (-1)^{n-3} t_{n-2}}{n}\right\}$$

или

$$\frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{s_p}{p} = \frac{4A_n}{n} - \frac{2}{n} \sum_{p=3}^{n} B_p + \frac{2}{n} \sum_{p=3}^{n} t_{p-1} +$$
$$+ \frac{2\sigma_1}{n} \sum_{p=3}^{n} (-1)^{p+1} - \frac{\sigma_1}{n} \sum_{p=3}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{p} + \frac{s_1 + \frac{s_2}{2}}{n}, \tag{13}$$

где $A_n = -(t_1 + \ldots + t_{n-2})$ (n нечетн.), $A_n = -(t_2 + \ldots + t_{n-2})$ (n четн.), $B_p = (-1)^p \left\{ \frac{t_1 - t_2 + \ldots + (-1)^{p-3} t_{p-2}}{p} \right\}$. Так как из существования $\lim t_n$ следует, что предел среднего арифметического последовательности $t_1, -t_2, t_3, -t_4, \ldots$ равен нулю, то из (13) вытекает лемма 2.

Теорема 2. *Из суммируемости метода (МС, 1) следует суммируемость методом (Н, 2).*

Из существования $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ и $\sigma_n = 2(-1)^n \{t_1 - t_2 + \ldots + (-1)^{n-2} t_{n-1}\} + (-1)^{n+1}\sigma_1$ следует, что

$$\sigma_n = o(n). \tag{14}$$

Из тождества $\frac{t_1 + \ldots + t_n}{n} - \frac{\sigma_0' + \ldots + \sigma_{n-1}'}{n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k} - \frac{\sigma_1}{2n} + \frac{\sigma_{n+1}}{2n}$, где $\sigma_{n-1}' = (s_0 + \ldots + s_{n-1})/n$, леммы 2 и (14) получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_0' + \ldots + \sigma_{n-1}'}{n} = \lim_{n\to\infty} t_n = s.$$

Так как метод суммирования (МС, 1) эквивалентен (Б, 1), а метод суммирования (Н, 2) эквивалентен (С, 2), то справедлива теорема 3.

Теорема 3. *Из суммируемости методом (Б, 1) следует суммируемость методом (С, 2).*

Следствие. Из суммируемости методом (Б, 1) следует суммируемость (Б, k), $k \geqslant 2$.

Действительно, из суммируемости (Б, 1) вытекает суммируемость (С, 2), откуда вытекает (лемма 1) суммируемость (Б, k), $k \geqslant 2$.

Теорема 4. *Методом суммирования* (С, $2+\alpha$), $\alpha > 0$, *сильнее метода суммирования* (Б, 1).

Для доказательства необходимо построить ряд, суммируемый (С, $2+\alpha$), $\alpha > 0$, но не суммируемый (Б, 1).

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ с последовательностью гельдеровских средних второго порядка $H_0^{(2)} = 1$, $H_1^{(2)} = 0$, $H_2^{(2)} = 1$, $H_3^{(2)} = 0, \ldots$ Последовательность средних третьего порядка сходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ суммируем (Н, 3), но не суммируем (Н, 2). Так как гельдеровский метод суммирования эквивалентен чезаровскому, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ будет суммироваться (С, 3), но не будет суммироваться (С, 2), а следовательно, и методом (Б, 1). Из ограниченности (Н, 2)-средних вытекает ограниченность (С, 2)-средних ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$. Итак, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ суммируется (С, 3) и имеет ограниченные (С, 2)-средние, следовательно [4], он суммируется (С, $2+\alpha$), $\alpha > 0$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ удовлетворяет всем поставленным условиям.

Поступило
13 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, С. R., 191, 976 (1930). [2] Ф. Харшиладзе, ДАН, 30, 692 (1941). [3] И. Карамата, Матем. сборн., 21 (63), 13 (1947). [4] E. W. Hobson, The Theory of Functions, 1926.