Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

Г. Я. МОРДКОВИЧ

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ НОРМАЛЬНОГО ДЕЛИТЕЛЯ У КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 12 XII 1950)

§ 1. Нахождению условий существования нормальных делителей у конечных групп было посвящено много работ. Ряд глубоких достаточных условий был доказан лишь при помощи теории характеров. В настоящей заметке указывается один простой признак существования нормального делителя, доказательство которого проводится вполне элементарно.

§ 2. Теорема. *Если*

$$q > \sqrt{a}, \tag{1}$$

то группа Γ *порядка* $q^\beta a$, *где* q — *простое*, $(a, q) = 1$, *имеет нормальный делитель порядка* $q^{\beta-1}$ *или порядка* q^β.

При $\beta = 1$ утверждение теоремы тривиально. Поэтому в дальнейшем предположим, что $\beta > 1$. Пусть Q_1 и Q_2 — любые две q-силовские подгруппы группы Γ и q^i — порядок их общего наибольшего делителя. Число различных элементов системы $Q_1 Q_2$, равное числу $q^{2\beta-i} = q^{2\beta} / q^i$, меньше числа всех элементов группы Γ, т. е. меньше числа $q^\beta a$. Из неравенства (1) следует неравенство $q^{\beta+2} > aq^\beta$, откуда заключаем, что $i \geqslant \beta - 1$.

Если $i = \beta$, $Q_1 = Q_2$, т. е. q-силовская подгруппа группы Γ в ней инвариантна.

Пусть $i = \beta - 1$, т. е. общий наибольший делитель двух любых q-силовских подгрупп группы Γ есть группа порядка $q^{\beta-1}$, инвариантная в этих силовских, потому что всякий делитель порядка $q^{\beta-1}$ группы порядка q^β в этой группе инвариантен.

Общий наибольший делитель групп Q_ι и Q_π обозначим $\Pi_{\iota,\pi}$ и запишем:

$$\Pi_{\iota,\pi} = (Q_\iota, Q_\pi).$$

Очевидно, общий наибольший делитель трех q-силовских подгрупп Q_i, Q_j, Q_k группы Γ может быть представлен в одном из следующих видов:

$$\delta = (\Pi_{i,j}, \Pi_{i,k}) = (\Pi_{i,j}, \Pi_{j,k}) = (\Pi_{i,k}, \Pi_{j,k}).$$

Первое равенство показывает, что δ есть пересечение подгрупп, инвариантных в Q_i, и потому δ инвариантна в Q_i; второе равенство показывает, что δ есть пересечение нормальных делителей Q_j, и потому инвариантна в Q_j; наконец, третье дает, что δ есть пересечение нормальных делителей Q_k, и потому инвариантна в Q_k.

Аналогично покажем, что если δ есть общий наибольший делитель нескольких q-силовских подгрупп группы Γ, δ есть инвариантный делитель каждой из этих подгрупп.

Пусть теперь

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_r \tag{2}$$

есть максимальная система (в смысле числа r) q-силовских подгрупп Γ, имеющих общий наибольший делитель, больший единицы, и пусть δ — этот делитель. Очевидно, δ есть нормальный делитель общего наименьшего кратного групп (2), т. е. группы $M = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_r\}$; в этом непосредственно убедимся, если преобразуем δ любым элементом из M и вспомним при этом, что этот любой элемент M есть комбинация элементов групп (2), в которых δ инвариантна.

Докажем сперва, что при $q > \sqrt{a}$ Γ имеет нормальный делитель порядка q^t, где $t > 0$.

Если $M = \Gamma$, то δ порядка q^t есть нормальный делитель Γ. Положим $M \subset \Gamma$. Пусть T (любой элемент группы Γ) переводит M в M' и систему (2) в систему

$$Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_r. \tag{3}$$

Покажем, что группы M и M' совпадают. Предположим, что группа Q_1 не встречается в ряде (3), который состоит из различных групп, потому что $Q_i = T^{-1}Q_iT$. Общий наибольший делитель групп M и M' содержит общие наибольшие делители группы Q_1 с каждой группой системы (3). Пусть Π есть общий наибольший делитель порядка $q^{\beta-1}$ групп Q_1 и Q'_1. Предположение, что Π есть общий наибольший делитель группы Q_1 с каждой группой ряда (3), противоречит выбору числа r. Значит, в ряде (3) найдется группа, например Q'_j, общий наибольший делитель которой с Q_1 (группа порядка $q^{\beta-1}$) не совпадает с Π. Обозначим его K. Π и K содержатся в общем наибольшем делителе групп M и M', и там же, значит, содержится $\Pi K = Q_1$.

Взяв вместо группы Q_1 любую группу системы (2), мы обнаружим, что группы M и M' совпадают, но тогда M инвариантна в Γ и содержит поэтому все q-силовские подгруппы группы Γ, а значит, δ есть пересечение всех q-силовских подгрупп группы Γ, и потому нормальный делитель Γ.

Мы доказали, что если $q > \sqrt{a}$, группа Γ порядка aq^β, если $\beta > 1$, имеет нормальный делитель порядка q^t, $t > 0$.

Если H_1 — этот нормальный делитель, то группа Γ / H_1 порядка $aq^{\beta'}$ $(q > \sqrt{a})$ снова имеет q-группу (т. е. группу, порядок которой есть степень q) в качестве своего инвариантного делителя. Таким образом убедимся, что Γ в качестве своего инвариантного делителя содержит или группу порядка $q^{\beta-1}$ или группу порядка q^β.

Заметим, что если $q > a$, то инвариантность q-силовксой подгруппы группы Γ следует из того, что порядок общего наибольшего делителя любых двух q-силовских подгрупп группы Γ есть q^β, что видно из неравенства $q^{\beta+1} > q^\beta a$.

Московский инженерно-экономический институт
им. Серго Орджоникидзе

Поступило
11 X 1950