Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

Е. Б. ДЫНКИН

АВТОМОРФИЗМЫ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 XII 1950)

Теорема 1. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — система простых корней* ([1], [2]) *полупростой алгебры Ли G и пусть $e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, \ldots, e_{\alpha_n}$ — соответствующие корневые векторы. Каждому изометричному относительно картановской метрики отображению $\alpha_i \to \alpha_{k_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы простых корней на себя отвечает автоморфизм f алгебры G, задаваемый формулами*

$$f(\alpha_i) = \alpha_{k_i}, \quad f(e_{\alpha_i}) = e_{\alpha_{k_i}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Обозначим через $\mathfrak{B}$ группу всех таких автоморфизмов. Группа $\mathfrak{A}$ всех автоморфизмов алгебры G разлагается в полупрямое произведение подгруппы $\mathfrak{B}$ и нормального делителя $\mathfrak{A}_0$, составленного из всех внутренних автоморфизмов алгебры G; т. е. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}_0 = \{e\}$.

Пусть алгебра G задана схемой простых корней. Изометричным отображениям системы простых корней на себя соответствуют перестановки точек схемы, не меняющие вида схемы. Для простых алгебр схемы простых корней перечислены в табл. 1. Из этих схем видно, что группа $\mathfrak{B}$ является циклической второго порядка для $A_n\,(n \geqslant 2)$, $D_n\,(n \geqslant 5)$ и E_6, изоморфна группе всех перестановок из трех элементов для D_4 и сводится к единице во всех остальных случаях. Таким образом, наша теорема сразу приводит к картановской классификации ([3], [5]) внешних автоморфизмов простых групп Ли.

Таблица 1

Фиксируем некоторую картановскую подалгебру $\mathfrak{H}$ алгебры G. Систему Σ корней G можно представлять себе вложенной в $\mathfrak{H}$. Рациональную линейную оболочку Σ обозначим через H. Обозначим через S группу всех внутренних автоморфизмов G, переводящих в себя $\mathfrak{H}$. Автоморфизмы из S преобразуют в себя систему Σ, а следовательно, преобразуют в себя и H.

Доказательство теоремы 1 основано на следующих леммах.

Лемма 1. *Если внутренний автоморфизм f полупростой алгебры G переводит в себя систему Σ_+ всех положительных корней G, то он оставляет на месте каждый корень.*

Лемма 2. *Для каждого $h \in H$ существует $\varphi \in S$ такое, что $h' = \varphi(h)$ удовлетворяет условию $(h', \gamma) \geqslant 0$ для всякого положительного корня γ.*

Лемма 3. *Пусть Σ_+ и Σ'_+ — системы положительных корней полупростой алгебры G, отвечающие двум различным способам упорядочения H. Существует внутренний автоморфизм $\varphi \in S$, отображающий Σ'_+ на Σ_+.*

Лемма 4. *Если автоморфизм φ оставляет на месте каждый простой корень, то он является внутренним.*

Доказательство лемм.

1. Внутренний автоморфизм f, переводящий в себя систему корней G, переводит в себя и систему весов любого линейного представления G. Будем писать $h \gg g$, если $h - g = \sum\limits_{\gamma \in \Sigma_+} k_\gamma \gamma$, где $k_\gamma \geqslant 0$. Поскольку f линейно и переводит в себя Σ_+, из $h \gg g$ следует $f(h) \gg f(g)$. Если Λ — старший вес неприводимого представления и M — любой вес того же представления, то $\Lambda \gg$ M ((4), лемма). В частности $\Lambda \gg f(\Lambda)$ и $\Lambda \gg f^{-1}(\Lambda)$. Из второго неравенства следует $f(\Lambda) \gg \Lambda$. Сопоставляя третье неравенство с первым, имеем $f(\Lambda) = \Lambda$. Таким образом, f оставляет на месте старший вес любого неприводимого представления. Поскольку линейная оболочка старших весов всех неприводимых представлений G совпадает с $\mathfrak{H}$, f оставляет на месте любой элемент $\mathfrak{H}$.

2. С каждым корнем γ связан внутренний автоморфизм φ_γ из S, действующий в H по формуле $\varphi_\gamma(h) = h - 2\dfrac{(h, \gamma)}{(\gamma, \gamma)}\gamma$. Очевидно, что, отправляясь от любого элемента $h \in H$, можно посредством цепочки преобразований $\varphi_{\gamma_1}, \varphi_{\gamma_2}, \ldots$ притти к элементу h', который для любого положительного корня γ удовлетворяет условию $\varphi_\gamma(h') \leqslant h'$, т. е. $(h', \gamma) \geqslant 0$.

3. Выберем $h \in H$ так, чтобы для любого корня γ, не принадлежащего Σ'_+, имело место $(h, \gamma) < 0$. В силу леммы 2, существует элемент $\varphi \in S$ такой, что $(\varphi(h), \gamma) \geqslant 0$ для всех корней $\gamma \in \Sigma_+$. Последнее неравенство равносильно $(h, \varphi^{-1}(\gamma)) \geqslant 0$, ибо автоморфизмы сохраняют картановскую метрику. Следовательно, $\varphi^{-1}(\Sigma_+) \subset \Sigma'_+$ или $\Sigma_+ \subset \varphi(\Sigma'_+)$. Из этого включения следует равенство $\Sigma_+ = \varphi(\Sigma_+)$, ибо в противном случае $\varphi(\Sigma'_+)$ должно было бы содержать пару элементов с суммой, равной нулю, между тем как Σ'_+ такой пары не содержит.

4. Корневой вектор e_γ определяется однозначно с точностью до пропорциональности условиями $\alpha \circ e_\gamma = (\alpha_i, \gamma) e_\gamma$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Поэтому для автоморфизма φ, удовлетворяющего условиям леммы 4, все корневые векторы являются собственными. Пусть $\varphi(e_{\alpha_i}) = a_i e_{\alpha_i}$. Выберем λ_i так, чтобы $\exp \lambda_i = a_i$ и рассмотрим элемент $h \in H$, для которого $(h, \alpha_i) = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Положим $Hx = h \circ x$. Внутренний автоморфизм $\psi = \exp H$ удовлетворяет, очевидно, условиям $\psi(e_{\alpha_i}) = \varphi(e_{\alpha_i})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Из соотношений $(\varphi(e_{\alpha_i}), \varphi(e_{-\alpha_i})) = (\psi(e_{\alpha_i}), \psi(e_{-\alpha i}))$, вытекающих из инвариантности картановского скалярного произведения, следует $\psi(e_{-\alpha_i}) = \varphi(e_{-\alpha_i})$ и, в силу теоремы 16 работы (2), $\psi = \varphi$.

Доказательство теоремы 1. Существование и единственность автоморфизма f, удовлетворяющего условиям (1). вытекает из теоремы 16 работы (2). Соотношение $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}_0 = \{e\}$ следует, из леммы 1. Докажем соотношение $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0\mathfrak{B}$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{A}$. По теореме о сопряженности картановских подалгебр (см., например, (3) или (5)) существует внутренний автоморфизм ψ_1, переводящий $\varphi(\mathfrak{H})$ в $\mathfrak{H}$. Автоморфизм $\varphi_1 = \psi_1\varphi$ преобразует в себя H.

Пусть Σ_+ — система всех положительных корней относительно какого-нибудь порядка. Тогда система $\Sigma'_+ = \varphi_1(\Sigma_+)$ может рассматриваться как система всех положительных корней относительно нового порядка, задаваемого соглашением: $\gamma > 0$ в новом смысле, если $\varphi_1^{-1}(\gamma) > 0$ в старом смысле. Согласно лемме 3, существует $\psi_2 \in S$, для которого $\psi_2(\Sigma_1') = \Sigma_1$. Автоморфизм $\varphi_2 = \psi_2\varphi_1$ переводит в себя Σ_+, а следовательно, переводит в себя и систему $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ простых корней. Пусть $\varphi_2(\alpha_i) = \alpha_{k_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Рассмотрим автоморфизм f, определенный формулами (1). Полагая $\varphi_3 = f^{-1}\varphi_2$, имеем $\varphi_3(\alpha_i) = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Согласно лемме 4, φ_3 — внутренний автоморфизм. Имеем $\varphi_3 = f^{-1}\psi_2\psi_1\varphi$, откуда $\varphi = \psi f$, где $\psi = \psi_1^{-1}\psi_2^{-1} f\varphi_3 f^{-1} \in \mathfrak{A}_0$, $f \in \mathfrak{B}$.

Пусть φ — автоморфизм, преобразующий в себя $\mathfrak{H}$. Из проведенного доказательства нетрудно вычитать следующий алгоритм для решения вопроса о том, является ли φ внутренним автоморфизмом.

Выбирается некоторый элемент h из H так, чтобы $(h, \alpha_i) > 0$, $(h, \alpha_i) \neq (h, \alpha_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n; i \neq j)$. Отправляясь от $h_1 = \varphi(h)$, строится, как при доказательстве леммы 2, последовательность $h_2, h_3, h_4, \ldots$, где $h_{k+1} = \varphi_{\gamma_k}(h_k)$, $h_{k+1} > h_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Пусть эта последовательность обрывается на h_r. Тогда для того, чтобы автоморфизм φ был внутренним, необходимо и достаточно, чтобы $h_r = h$.

Применим этот алгоритм к автоморфизму θ, заданному формулами $\theta(e_{\alpha_i}) = e_{-\alpha_i}$, $\theta(e_{-\alpha_i}) = e_{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (из которых вытекает $\theta(h) = -h$ для любого $h \in H$). Мы придем к следующей лемме.

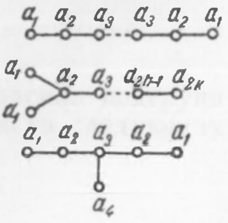
Лемма 5. *Автоморфизм θ является внешним для алгебр A_n $(n \geqslant 2)$, D_{2k+1} и E_6 и является внутренним для всех остальных простых алгебр. Для полупростой алгебры G автоморфизм φ является внутренним тогда и только тогда, когда он является внутренним для всех простых идеалов, на которые разлагается G.*

(Поскольку среди простых алгебр обладают внешними автоморфизмами только A_n $(n \geqslant 2)$, D_n $(n \geqslant 3)$ и E_6, проверку приходится проводить только для них. Для алгебр A_n и D_n, допускающих весьма простое матричное представление, быстрее, чем общий алгоритм, ведут к цели прямые методы, основанные на том, что если в пространстве представления выбрать базис из весовых векторов, то автоморфизм θ принимает вид $\theta(X) = -X'$, где X' обозначает транспонированную матрицу.)

Из леммы 5 легко вывести перечисление всех неприводимых самоконтрагредиентных представлений полупростых алгебр Ли (т. е. представлений $x \to X$, эквивалентных контрагредиентному представлению $x \to -X'$; впервые такое перечисление было дано (в другой форме) А. И. Мальцевым ([6])).

Теорема 2. *Все неприводимые представления алгебр B_n, C_n, D_{2k}, G_2, F_4, E_7, E_8 являются самоконтрагредиентными. Среди неприводимых представлений алгебр A_n $(n \geqslant 2)$, D_{2k+1}, E_6 самоконтрагредиентными являются те и только те, старший вес которых инвариантен при всех автоморфизмах из $\mathfrak{B}$ (для этого схема представления ([4]) должна иметь вид, указанный в табл. 2). Для того чтобы было самоконтрагредиентно неприводимое представление полупростой алгебры Ли, необходимо и достаточно, чтобы связные компоненты, на которые распадается соответствующая схема, отвечали самоконтрагредиентным представлениям.*

Таблица 2



Доказательство. Если Δ — система весов некоторого представления, то $\theta(\Delta)$ — система весов контрагредиентного представления. Для самоконтрагредиентности необходимо и достаточно, чтобы $\theta(\Delta) = \Delta$. Если $\theta \in \mathfrak{A}_0$, то это условие выполнено для всех представлений. Поэтому, согласно лемме 5, несамоконтрагредиентные представления могут быть только у $A_n (n \geqslant 2)$, D_{2k+1}, E_6. Для каждой из этих алгебр группа $\mathfrak{B}$ содержит, кроме единицы, только один элемент. Назовем его f. Из разложения $\theta = f\psi$ $(\psi \in \mathfrak{A}_0)$ следует $\theta(\Delta) = f(\Delta)$. Системы весов двух неприводимых представлений совпадают тогда и только тогда, когда совпадают старшие веса. Поэтому $f(\Delta) = \Delta$ тогда и только тогда, когда $f(\Lambda) = \Lambda$, где Λ — старший вес системы Δ.

Поступило
4 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, Матем. сборн., 18 (60), 347 (1946). [2] Е. Б. Дынкин, Усп. матем. наук, 4 : 2 (20), 59 (1947). [3] E. Cartan, Bull. Soc. Math. de France, 49, 361 (1925). [4] Е. Б. Дынкин, ДАН, 71, № 2 (1950). [5] Ф. Р. Гантмахер, Матем. сборн., 5 : 1 (47), 101 (1939). [6] А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 8, 143 (1944).