Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. Я. ВИЛЕНКИН

ОБОБЩЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 XII 1950)

Как известно, в теории топологических групп не имеет места существующее для дискретных групп взаимно-однозначное соответствие между гомоморфизмами и нормальными делителями. Лишь открытые гомоморфизмы и замкнутые нормальные делители связаны этим соответствием. В то же время развитие топологической алгебры и ее приложений к комбинаторной топологии привело в настоящее время к необходимости иметь дело с незамкнутыми нормальными делителями и неоткрытыми гомоморфизмами ([1–4]). Целью настоящей заметки является восстановление путем соответствующего расширения понятия нормального делителя топологической группы указанного выше взаимно-однозначного соответствия и выяснение того, какие свойства обычных нормальных делителей сохраняются для обобщенных нормальных делителей.

1. Определение 1. Общей топологической группой называется топологическое пространство (вообще говоря, без каких-либо аксиом отделимости), являющееся в то же время группой, причем умножение элементов и переход к обратному элементу непрерывны в заданной топологии ([1, 2, 4]).

2. Определение 2. Обобщенным нормальным делителем общей топологической группы G называется совокупность $\mathfrak{N}=[N; U_\alpha]$, состоящая из нормального делителя N (вообще говоря, незамкнутого) и системы окрестностей единицы $[U_\alpha]$, причем выполнены следующие требования: 1) $N\subset\bigcap U_\alpha$; 2) для любых α и β найдется такое γ, что $U_\gamma\subset U_\alpha\bigcap U_\beta$; 3) для любого α найдется такое β, что $U_\beta U_\beta^{-1}\subset U_\alpha$; 4) для любого α и любого элемента $x\in G$ найдется такое β, что $x^{-1}U_\beta x\subset U_\alpha$.

Пусть M — некоторый нормальный делитель в G и $\mathfrak{N}=[N; U_\alpha]$ — обобщенный нормальный делитель в M. Мы скажем, что $\mathfrak{N}$ является обобщенным нормальным делителем в G, если N является нормальным делителем в G и для любого U_α и любого элемента $x\in G$ найдется такое β, что $x^{-1}U_\beta x\subset U_\alpha$. В этом случае мы идентифицируем $\mathfrak{N}$ с обобщенным нормальным делителем $[N; V_\beta U_\alpha]$ группы G, где U_α и V_β пробегают независимо систему $[U_\alpha]$ и полную систему окрестностей единицы группы G. В частности, каждому нормальному делителю N группы G соответствует обобщенный нормальный делитель $[N; V_\beta N]$.

Два обобщенных нормальных делителя $[N_1; U_\alpha^{(1)}]$ и $[N_2; U_\alpha^{(2)}]$ мы будем считать тождественными, если $N_1=N_2$ и каждое $U_\alpha^{(1)}$ содержит некоторое $U_\beta^{(2)}$ и каждое $U_\alpha^{(2)}$ содержит некоторое $U_\beta^{(1)}$.

3. Определение 3. Пусть $\mathfrak{N} = [N; U_\alpha]$ — обобщенный нормальный делитель общей топологической группы G. Фактор-группа $G/\mathfrak{N} = G_1$ состоит из смежных классов группы G по N. В качестве полной системы окрестностей единицы в G_1 примем совокупность множеств вида NU_α.

Теорема 1. *Фактор-группа $G/\mathfrak{N}$ является общей топологической группой. Если $\mathfrak{N}$ — обобщенный нормальный делитель, связанный с нормальным делителем N, то группы G/N и $G/\mathfrak{N}$ изоморфны. Если N замкнут, то наше определение фактор-группы совпадает с обычным.*

4. Пусть f — непрерывное гомоморфное отображение общей топологической группы G на общую топологическую группу G_1. Пусть $[V_\alpha]$ пробегает полную систему окрестностей единицы группы G_1. Тогда $\mathfrak{N} = [f^{-1}(e); f^{-1}(V_\alpha)]$ является обобщенным нормальным делителем в G. Фактор-группа $G/\mathfrak{N}$ изоморфна группе G_1.

5. Обобщенный нормальный делитель $\mathfrak{N}_1 = [N_1; U_\alpha^{(1)}]$, содержится в обобщенном нормальном делителе $\mathfrak{N}_2 = [N_2; U_\alpha^{(2)}]$, если $N_1 \subset N_2$ и для каждого α найдется такое β, что $U_\beta^{(1)} \subset U_\alpha^{(2)}$. Существует взаимно-однозначное соответствие между обобщенными нормальными делителями фактор-группы $G/\mathfrak{N}_1$ и обобщенными нормальными делителями группы G, содержащими $\mathfrak{N}_1$.

Пусть $\{\mathfrak{N}_\alpha = [N_\alpha; U_\beta^{(\alpha)}]\}$ — некоторое множество обобщенных нормальных делителей группы G. Их пересечением называется совокупность нормального делителя $N = \bigcap N_\alpha$ группы G и системы множеств, являющихся конечными пересечениями множеств $U_\beta^{(\alpha)}$ с различными α и β.

Нетрудно видеть, что $\bigcap \mathfrak{N}_\alpha$ является обобщенным нормальным делителем группы G. Пересечение всех обобщенных нормальных делителей группы G, содержащих все $\mathfrak{N}_\alpha$, называется обобщенным нормальным делителем, порожденным системой обобщенных нормальных делителей $[\mathfrak{N}_\alpha]$.

6. Определение 4. Обобщенный нормальный делитель $\mathfrak{N}$ называется прямым произведением обобщенных нормальных делителей $\{\mathfrak{N}_\alpha = [N_\alpha; U_\beta^{(\alpha)}]\}$, если: 1) $\mathfrak{N}$ порождается обобщенными нормальными делителями $\mathfrak{N}_\alpha$; 2) пересечение всех обобщенных нормальных делителей $\mathfrak{M}_\alpha$, где $\mathfrak{M}_\alpha$ порождается всеми $\mathfrak{N}_\gamma$, кроме $\mathfrak{N}_\alpha$, образует полную систему окрестностей нуля группы G.

Если N и $[N_\alpha]$ являются нормальными делителями в G, а $\mathfrak{N}$ и $[\mathfrak{N}_\alpha]$ — соответствующими им обобщенными нормальными делителями, то из того, что N является прямым произведением $[N_\alpha]$, вытекает, что $\mathfrak{N}$ является прямым произведением $[\mathfrak{N}_\alpha]$ и обратно.

Пусть $[G_\alpha]$ — некоторое множество общих топологических групп, в каждой из которых отмечен обобщенный нормальный делитель $\mathfrak{N}_\alpha = [N_\alpha; U_\beta^{(\alpha)}]$. Прямым произведением групп G_α с отмеченными обобщенными нормальными делителями $\mathfrak{N}_\alpha$ назовем группу G, элементами которой являются совокупности $g = [g_\alpha]$, где все $g_\alpha \in G_\alpha$ и почти все $g_\alpha \in N_\alpha$. В качестве полной системы окрестностей единицы группы G примем совокупность множеств вида $U^r[V_\alpha]$, где почти для всех α V_α содержит одно из множеств $U_\beta^{(\alpha)}$ и все V_α открыты в G_α. При этом $U^r[V_\alpha]$ состоит из всех элементов $g = [g_\alpha]$ таких, что все $g_\alpha \in V_\alpha$.

Теорема 2. *Прямое произведение общих топологических групп G_α с отмеченными в них обобщенными нормальными делителями $\mathfrak{N}_\alpha$ является общей топологической группой. При этом, если $\mathfrak{N}_\alpha$ являются обобщенными нормальными делителями, связанными с замкнутыми нормальными делителями N_α, то рассматриваемое* *прямое произведение совпадает с обычным прямым произведением групп G_α с отмеченными нормальными делителями N_α* [3].

Мы будем обозначать прямое произведение $G = P^r[G_\alpha : \mathfrak{N}_\alpha]$.

Теорема 3. *Пусть $G = P^r[G_\alpha : \mathfrak{N}_\alpha]$ и пусть при каждом α в $\mathfrak{N}_\alpha$ задан обобщенный нормальный делитель $\mathfrak{M}_\alpha = [M_\alpha; V_\beta^{(\alpha)}]$. Пусть $\mathfrak{M} = [M; U^r[V_\beta^{(\alpha)}]]$ — обобщенный нормальный делитель группы G, где M состоит из всех элементов $g = [g_\alpha]$ таких, что все $g_\alpha \in M_\alpha$, а $U^r[V_\alpha^{(\beta)}]$ состоит из всех элементов $g = [g_\alpha]$ таких, что все $g_\alpha \in V_\alpha^{(\beta)}$. Тогда $\mathfrak{M}$ является прямым произведением нормальных делителей $\mathfrak{M}_\alpha$.*

7. Определение 5. Два обобщенных нормальных делителя $\mathfrak{N}_1 = [N_1; U_\alpha^{(1)}]$ и $\mathfrak{N}_2 = [N_2; U_\alpha^{(2)}]$ групп G_1 и G_2 называются изоморфными, если в прямом произведении групп G_1 и G_2 существует обобщенный нормальный делитель $\mathfrak{N} = [N; U_\alpha]$ такой, что: 1) пересечение $\mathfrak{N}$ и обобщенного нормального делителя в $G_1 \times G_2$, соответствующего G_1 (соответственно G_2), является полной системой окрестностей единицы в $G_1 \times G_2$; 2) проекция $\mathfrak{N}$ в G_1 равна $\mathfrak{N}_1$, а проекция $\mathfrak{N}$ в G_2 равна $\mathfrak{N}_2$.

Теорема 4. *Введенное нами определение изоморфизма рефлексивно, симметрично и транзитивно. Если нормальные делители N_1 и N_2 соответствуют обобщенным нормальным делителям $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$, то наше определение изоморфизма совпадает с обычным.*

8. Заметим, что если $\mathfrak{N}_1 = [N_1; U_\alpha^{(1)}]$ и $\mathfrak{N}_2 = [N_2; U_\alpha^{(2)}]$ — два обобщенных нормальных делителя группы G, то порожденный ими обобщенный нормальный делитель равен $\mathfrak{N} = [N_1 N_2; U_\alpha^{(1)} U_\beta^{(2)}]$, где $U_\alpha^{(1)}$ и $U_\beta^{(2)}$ независимо пробегают системы $[U_\alpha^{(1)}]$ и $[U_\alpha^{(2)}]$.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ — обобщенные нормальные делители группы G. Тогда $\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 / \mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2 / \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$.*

Как известно, эта формула не имеет места, если рассматривать обычные нормальные делители в G. Это объясняется тем, что $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2$ отличается от обобщенного нормального делителя, связанного с $N_1 \cap N_2$.

Теорема 6. *Любые две конечные убывающие цепочки $\mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{N}_k$ и $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{M}_r$ обобщенных нормальных делителей группы G обладают изоморфными уплотнениями.*

Эта теорема также несправедлива, если мы ограничиваемся обычными нормальными делителями.

9. Пусть в группе G задана ограниченность [5] и $\mathfrak{N} = [N; U_\alpha]$ — ее обобщенный нормальный делитель. Мы скажем, что в $\mathfrak{N}$ задана ограниченность, если в N задана такая ограниченность, что все ограниченные в N множества ограничены и в G. Если в обобщенных нормальных делителях $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ заданы ограниченности, то мы скажем, что $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2$, если $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2$ в смысле п. 5 и если каждое множество, ограниченное в $\mathfrak{N}_1$, ограничено и в $\mathfrak{N}_2$. Пересечением обобщенных нормальных делителей $[\mathfrak{N}_\alpha]$ с заданной ограниченностью называется их пересечение в смысле п. 5, в котором ограниченными называются множества, ограниченные в каждом $\mathfrak{N}_\alpha$. Пересечение всех обобщенных нормальных делителей, содержащих все $\mathfrak{N}_\alpha$, назовем обобщенным нормальным делителем, порожденным множеством обобщенных нормальных делителей $[\mathfrak{N}_\alpha]$ с заданной ограниченностью. В прямую сумму ограниченность вводится так же, как и в [5].

Определение 6. Обобщенные нормальные делители $\mathfrak{N}_1 = [N_1; U_\alpha^{(1)}]$ и $\mathfrak{N}_2 = [N_2; U_\beta^{(2)}]$ общих топологических групп G_1 и G_2 называются вполне изоморфными, если они изоморфны в смысле определения 5, причем в $\mathfrak{N}$ существует такая ограниченность, что в $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ ограничены проекции ограниченных множеств из $\mathfrak{N}$ и только они.

Теорема 7. *Пусть* $\mathfrak{N}_1 = [N_1; U_\alpha^{(1)}]$ *и* $\mathfrak{N}_2 = [N_2; U_\beta^{(2)}]$ — *обобщенные нормальные делители общих топологических групп* G_1 *и* G_2, *причем* $G_1/\mathfrak{N}_1 \sim G_2/\mathfrak{N}_2$. *Тогда в* $G_1 \times G_2$ *существует такой обобщенный нормальный делитель* $\mathfrak{N} = [N; U_\gamma]$, *что* $G_1\mathfrak{N} = G_2\mathfrak{N} = G_1 \times G_2$ *и* $G_1 \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1$, $G_2 \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_2$.

Определение 7. Пусть общая топологическая группа G с заданной ограниченностью вполне изоморфна фактор-группам $G_1/\mathfrak{N}_1$ и $G_2/\mathfrak{N}_2$, причем $\mathfrak{N}_1 = [N_1; U_\alpha^{(1)}]$, $\mathfrak{N}_2 = [N_2; U_\beta^{(2)}]$ и в $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ задана ограниченность. Мы скажем, что $G_1/\mathfrak{N}_1$ и $G_2/\mathfrak{N}_2$ являются **изоморфными представлениями** группы G, если в нормальном делителе $\mathfrak{N}$ из теоремы 7 можно задать такую ограниченность, что ограниченными множествами в G_1 и G_2 являются проекции ограниченных множеств из $\mathfrak{N}$ и только они, а ограниченными множествами в $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ являются пересечения ограниченных множеств из $\mathfrak{N}$ с G_1 и G_2 и только они.

Поступило
27 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Eilenberg and S. MacLane, Ann. of Math., 43, 761 (1942). [2] Н. Я. Виленкин, ДАН, 58, 1573 (1947). [3] Н. Я. Виленкин, Матем. сборн., 19, 154 (1946). [4] K. Kadaira, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 23, 75 (1941). [5] Н. Я. Виленкин, ДАН, 72, 617 (1950).