Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

Н. С. ПИСКУНОВ

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 4 XII 1950)

В теории движения жидкостей и газов в пористой среде имеет значение решение следующей задачи:

Найти решение $z = p(x, y, t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1\text{–}3) \tag{1}$$

в области $x^2 + y^2 > r_0^2$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$p(x, y, 0) = P_0, \tag{2}$$

$$\int_0^T p \frac{\partial p}{\partial r}\Big|_{r=\sqrt{x^2+y^2}=r_0} dt = -Q, \tag{3}$$

где Q и T — заданные числа.

Будем предполагать, что $p(x, y, t)$ есть функция от $r = \sqrt{x^2+y^2}$ и t. Уравнение (1) примет вид

$$2p\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + 2\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)^2 + \frac{2}{r} p \frac{\partial p}{\partial r} - a^2 \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

с условиями

$$p(r, 0) = P_0, \tag{2'}$$

$$\int_0^T p \frac{\partial p}{\partial r}\Big|_{r=r_0} dt = -Q. \tag{3'}$$

Аналогично тому, как это делала П. Я. Полубаринова-Кочина [4], введем новые переменные положения

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{t}}. \tag{5}$$

Уравнение (4) примет вид

$$4pp''\xi + 4p'^2\xi + 4pp' + a^2p'\xi^2 = 0. \tag{6}$$

Найдем решение этого уравнения при следующих условиях:

$$\lim_{\xi\to\infty} p(\xi) = P_0, \tag{7}$$

$$\left(p\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_0=r_0/\sqrt{T}} = -Q^*\sqrt{T} \quad (Q^*>0). \tag{8}$$

Из условия (7) следует условие (2); выполнение условия (8) даст возможность удовлетворить условию (3) при соответствующем выборе Q^*.

Перепишем уравнение (6):

$$\frac{p''}{p'}+\frac{p'}{p}+\frac{1}{\xi}+\frac{a^2\xi}{4p}=0.$$

Интегрируя, получим

$$\ln(Cp'p\xi) = -\frac{a^2}{4}\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{\xi\,d\xi}{p},$$

или

$$pp' = C\frac{1}{\xi}\exp\left[-\frac{a^2}{4}\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{\xi\,d\xi}{p}\right]. \tag{9}$$

Из условия (8) определяем

$$C = -r_0Q^*.$$

Следовательно,

$$pp' = -Q^*r_0\frac{1}{\xi}\exp\left[-\frac{a^2}{4}\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{\xi\,d\xi}{p}\right]. \tag{10}$$

Интегрируя еще раз и принимая во внимание условие (7), получим

$$\frac{p^2}{2} = Q^*r_0\int_{\xi}^{\infty}\frac{1}{\xi}\exp\left[-\frac{a^2}{4}\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{\xi\,d\xi}{p}\right]d\xi+\frac{P_0^2}{2}. \tag{11}$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения (6) при условиях (7) и (8) (если оно существует) удовлетворяет уравнению (11), если решение этого уравнения существует.

Чтобы доказать, что решение уравнения (6) существует, рассмотрим сначала решение этого уравнения при следующих условиях:

$$p(b) = P_0, \tag{12}$$

$$pp'\big|_{\xi=\xi_0} = -Q^*\sqrt{T}. \tag{13}$$

Аналогично (9) можем написать

$$pp' = -\frac{C}{\xi}\exp\left[-\frac{a^2}{4}\int_{b}^{\xi}\frac{\xi\,d\xi}{p}\right]. \tag{14}$$

$$\frac{p^2}{2} = -C\int_{b}^{\xi}\frac{1}{\xi}\exp\left[-\frac{a^2}{4}\int_{b}^{\xi}\frac{\xi\,d\xi}{p}\right]d\xi+\frac{P_0^2}{2}. \tag{15}$$

Из условия (14) следует

$$P_0 p'_{\xi=b} = -\frac{C}{b}, \text{ или } p'_{\xi=b} = -\frac{C}{P_0 b}. \tag{16}$$

Рассмотрим решение уравнения (6) при условиях (12) и (16). Решение этой задачи существует при любом C и $P_0 \neq 0$ в области $r_0 \leqslant \xi \leqslant b$. Это решение удовлетворяет интегральному уравнению (15).

Подберем далее C так, чтобы выполнялось условие (13). На основании (14) получаем

$$-Q^* \sqrt{T} = -\frac{C}{\xi_0} \exp\left[-\frac{a^2}{4}\int_b^{\xi_0} \frac{\xi\, d\xi}{p}\right],$$

откуда находим

$$C = Q^* r_0 \exp\left[\frac{a^2}{4}\int_b^{\xi_0} \frac{\xi\, d\xi}{p}\right].$$

Подставляя в (15), получаем

$$\frac{p^2}{2} = -Q\, r_0 \exp\left[\frac{a^2}{4}\int_b^{\xi_0} \frac{\xi\, d\xi}{p}\right] \int_b^{\xi} \frac{1}{\xi} \exp\left[-\frac{a^2}{4}\int_b^{\xi} \frac{\xi\, d\xi}{p}\right] d\xi + \frac{P_0^2}{2}. \tag{17}$$

Решение интегрального уравнения (17) является решением уравнения (6) при условиях (12) и (13).

Существование решения интегрального уравнения (17) доказывается методом последовательных приближений.

Далее рассматривается последовательность

$$p_{b_1}, p_{b_2}, \ldots, p_{b_n}, \ldots, \tag{18}$$

где p_{b_n} есть решение уравнения (17), в котором положено $b = b_n$.

Доказывается, что эта последовательность сходится при $b_n \to \infty$, что полученная предельная функция ограничена и удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) и условиям (7) и (8).

Определенная функция $p(\xi) = p(r/\sqrt{t})$ удовлетворяет условию (2'). Далее доказывается, что при соответствующем выборе Q^* $p(r/\sqrt{t})$ будет удовлетворять и условию (3').

Отметим одно важное для приложений обстоятельство.

Всякое решение уравнения (11) таково, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T p \left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_0} dt}{Q^* T} = 1.$$

Проведенные подсчеты показывают, что практически

$$\int_0^T p \left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_0} dt \approx Q^* T,$$

т. е.

$$Q^*T = Q.$$

Далее устанавливается приближенный метод решения уравнения (11).

Поступило
17 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Христианович, С. Г. Михлин и Б. Б. Девисон, Некоторые новые вопросы механики сплошной среды, Изд. АН СССР, 1938. [2] Л. С. Лейбензон, Нефтепромысловая механика, 1934, ч. II. [3] В. Н. Щелкачев и Б. Б. Лапук, Подземная гидравлика, 1949. [4] П. Я. Полубаринова-Кочина, ДАН, 63, № 6 (1948).