Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 4

МЕХАНИКА

И. С. АРЖАНЫХ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ УПРУГОГО ТЕЛА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 2 XII 1950)

Рассмотрим вопрос о построении интегральных уравнений первой и второй граничных задач, относящихся к уравнению

$$\mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + l\mathbf{u} = \mathbf{f}. \qquad (1)$$

В настоящее время известны два класса интегральных уравнений для этих задач: 1) уравнения, ядра которых зависят от параметра l [1]; 2) уравнения, для конструкции которых необходимы функции Грина проблем Дирихле и Неймана [2].

Ниже будут указаны интегральные уравнения, ядра которых не зависят от параметра l, причем для их конструкции функции Грина не нужны.

Пусть $p, q \in Q$, $s, t \in S$; если Q лежит внутри S, то имеем внутреннюю задачу; если Q вне S, то внешнюю. Будем предполагать, что поверхность S замкнутая, гладкая в смысле Ляпунова. Направим нормаль $\mathbf{n}_s$ вне S и будем отличать внутреннюю задачу от внешней с помощью параметра ε: $\varepsilon = +1$ для внутренней задачи, $\varepsilon = -1$ для внешней.

Введем в рассмотрение тензор Кельвина

$$L(p, q) = \left(I + \mu_0\left\{\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right\}\right), \quad \mu_0 = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{q} - \mathbf{p}, \qquad (2)$$

и два следующих взаимно сопряженных тензора:

$$K(t, s \mid a) = \left(I + \nu_a\left\{\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right\}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_s} + \zeta_a\left\{\mathbf{n}_s \times \nabla_t\frac{1}{r}\right\}, \qquad (3)$$

$$\tilde{K}(s, t \mid a) = \left(I + \nu_a\left\{\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right\}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_t} + \zeta_a\left\{\nabla_s\frac{1}{r}\times\mathbf{n}_t\right\}, \qquad (4)$$

где

$$\mathbf{r} = \mathbf{s} - \mathbf{t}, \qquad \nu_a = \frac{3(\lambda+\mu)(2\mu+a)}{2\mu^2 - a(\lambda+\mu)}, \qquad \zeta_a = \frac{2\mu^2 + a(\lambda+3\mu)}{2\mu^2 - a(\lambda+\mu)}.$$

При $a = 0$ эти тензоры обращаются в $K(t, s)$ и $\tilde{K}(s, t)$ [3].

Обозначим через $\Delta_n\mathbf{u}$ вектор

$$\lim_{q\to s}\{(2\mu + a)(\mathbf{n}_s\nabla_q)\mathbf{u}(q) + (\lambda - a)\mathbf{n}_s\operatorname{div}_q\mathbf{u} + (\mu + a)[\mathbf{n}_s\operatorname{rot}_q\mathbf{u}]\}, \qquad (5)$$

который при $a = 0$ обращается в полную нормальную производную $d_n\mathbf{u}$ [3].

В первой задаче дан вектор $\mathbf{u}(s) = \mathbf{u}_s$ в граничных точках; во второй задаче дан вектор $d_n \mathbf{u} = \mathbf{F}_n$.

Условимся говорить, что выполнено условие $\mathrm{A}(\overline{\psi})$, если ньютоновский потенциал простого слоя плотности $\overline{\psi}$ существует вместе со своими первыми производными в граничных точках, и что выполнено условие $\mathrm{AB}(\overline{\psi})$, если, сверх того, ньютоновский потенциал двойного слоя той же плотности существует вместе со своими первыми производными в граничных точках.

Пусть

$$\mathbf{f}_* = -\int_Q L(p,\ q)\,\mathbf{f}(q)\,dq,$$

$$\nu = \frac{2\mu^2}{\lambda + 3\mu},\quad \chi_0 = 2\pi\frac{\lambda + 2\mu}{\mu},\quad \chi = 4\pi\mu\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 3\mu}, \tag{6}$$

$$\chi_a = \frac{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)}{2\mu^2 - a(\lambda + \mu)},\quad \eta_a = \frac{2\mu^2 - a(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu}.$$

Теорема 1 (A). *Вектор* $\mathbf{u}$ *первой задачи удовлетворяет системе интегральных уравнений*

$$\begin{gathered}2\chi\mathbf{u}(p) = \mathbf{u}_* + l\int_Q L(p,\ q)\,\mathbf{u}(q)\,dq + \varepsilon\int_S L(p,\ s)\,\overline{\psi}(s)\,ds,\\ \chi_a\overline{\psi}(t) = \overline{\psi}_* + l\int_Q \overline{K}(q,\ t\,|\,a)\,\mathbf{u}(q)\,dq + \varepsilon\int_S \overline{K}(s,\ t\,|\,a)\overline{\psi}(s)\,ds,\end{gathered} \tag{1,A}$$

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{f}_* - \varepsilon\eta_a\int_S K(p,\ s\,|\,a)\,\mathbf{u}_s\,ds,\quad \overline{\psi}_* = \frac{1}{\eta_a}\Delta_n\mathbf{u}_s, \tag{7}$$

если выполнено условие $\mathrm{A}(\overline{\psi})$.

Теорема 1 (AB). *Вектор* $\mathbf{u}$, *удовлетворяющий системе интегральных уравнений*

$$\begin{gathered}2\chi\mathbf{u}(p) = \mathbf{u}_* + l\int_Q L(p,\ q)\,\mathbf{u}(q)\,dq + \varepsilon\nu\int_S K(p,\ s\,|\,a)\overline{\psi}(s)ds,\\ \chi_a\overline{\psi}(t) = \overline{\psi}_* + \frac{l}{\nu}\int_Q L(t,\ q)\,\mathbf{u}(q)\,dq + \varepsilon\int_S K(t,\ s\,|\,a)\,\overline{\psi}(s)\,ds,\end{gathered} \tag{1,AB}$$

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{f}_*,\quad \psi_* = \frac{1}{\nu}(\mathbf{u}_* - 2\chi\mathbf{u}_s), \tag{8}$$

решает первую задачу, если выполнено условие $\mathrm{AB}(\overline{\psi})$.

Для второй задачи необходимо положить $a = 0$.

Теорема 2 (AB). *Вектор* $\mathbf{u}$ *второй задачи удовлетворяет системе интегральных уравнений*

$$\begin{gathered}2\chi\mathbf{u}(p) = \mathbf{u}_* + l\int_Q L(p,\ q)\,\mathbf{u}(q)\,dq + \varepsilon\nu\int_S K(p,\ s)\,\overline{\psi}(s)\,ds,\\ \chi_0\overline{\psi}(t) = \overline{\psi}_* + \frac{l}{\nu}\int_Q L(t,\ q)\,\mathbf{u}(q)\,dq - \varepsilon\int_S \overline{K}(t,\ s)\overline{\psi}(s)\,ds,\end{gathered} \tag{2,AB}$$

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{f}_* + \varepsilon\int_S L(p,\ s)\,\mathbf{F}_n\,ds,\quad \overline{\psi}_* = \frac{1}{\nu}\mathbf{u}_*, \tag{9}$$

если выполнено условие $\mathrm{AB}(\overline{\psi})$.

Теорема 2 (A). *Вектор* $\mathbf{u}$, *удовлетворяющий системе интегральных уравнений*

$$2\chi\mathbf{u}(p)=\mathbf{u}_*+l\int_Q L(p,\ q)\,\mathbf{u}(q)\,dq-\varepsilon\int_S L(p,\ s)\,\overline{\psi}(s)\,ds,$$

$$\chi_0\,\overline{\psi}(t)=\overline{\psi}_*+l\int_Q \check{K}(q,\ t)\,\mathbf{u}(q)\,dq-\varepsilon\int_S \check{K}(s,\ t)\,\overline{\psi}(s)\,ds, \tag{2,A}$$

$$\mathbf{u}_*=\mathbf{f}_*,\quad \overline{\psi}_*=\frac{1}{\nu}(d_n\mathbf{u}_*-2\chi\mathbf{F}_n), \tag{10}$$

решает вторую задачу, если выполнено условие A $(\overline{\psi})$.

При доказательстве следует использовать основные свойства векторных потенциалов объемных сил $\mathbf{U}=\int_Q L(p,\ q)\,\overline{\tau}(q)\,dq$, поверхностных сил $\mathbf{v}=\int_S L(p,\ s)\,\overline{\sigma}(s)\,ds$ и поверхностных деформаций $\mathbf{w}=$ $=\int_S K(p,\ s\,|\,a)\,\overline{\rho}(s)\,ds.$

Эти свойства состоят в следующем:

1) для правильного ($\varepsilon=+1$) или регулярного ($\varepsilon=-1$) вектора $\mathbf{u}$ имеет место формула

$$2\chi\mathbf{u}(p)=-\int_Q L(p,\ q)\,\Lambda_\mu\,\mathbf{u}\,dq+\varepsilon\int_S L(p,\ s)\,\Delta_n\,\mathbf{u}\,ds-\varepsilon\eta_a\int_S K(p,\ s\,|\,a)\,\mathbf{u}\,ds, \tag{11}$$

$$\Lambda_\mu\mathbf{u}\equiv\mu\nabla^2\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}; \tag{12}$$

2) потенциалы $\mathbf{U}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ удовлетворяют уравнениям

$$\Lambda_\mu\mathbf{U}=-2\chi\overline{\tau},\quad \Lambda_\mu\mathbf{v}=0,\quad \Lambda_\mu\mathbf{w}=0; \tag{13}$$

3) если выполнено условие A $(\overline{\sigma})$, то

$$\Delta_n\mathbf{v}=\varepsilon\chi\overline{\sigma}(t)+\eta_a\int_S \check{K}(s,\ t\,|\,a)\,\overline{\sigma}(s)\,ds; \tag{14}$$

4) если выполнено условие AB $(\overline{\rho})$, то

$$\lim_{p\to t}\mathbf{w}(p)=-\varepsilon\chi_a\overline{\rho}(t)+\int_S K(t,\ s\,|\,a)\,\overline{\rho}(s)\,ds. \tag{15}$$

Институт математики и механики
Академии наук Узб.ССР

Поступило
21 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Д. Купрадзе, Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, М., 1950. [2] И. С. Аржаных, ДАН, 73, № 1 (1950). [3] И. С. Аржаных, Бюлл. САГУ, 30 (1949).