Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

ЦЗЕ-ПЕЙ ЧАН

РЕФЛЕКТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 XI 1950)

В настоящей статье мы рассматриваем линейные замкнутые операторы в унитарном пространстве (т. е. пространстве, в котором предполагаются выполненными все аксиомы гильбертова пространства за исключением аксиомы сепарабельности), которые переводят свою область определения в некоторое ее подмножество. Такие операторы называются в этой работе рефлективными. Основная теорема утверждает, что всякий линейный замкнутый симметрический (или нормальный) оператор рефлективен тогда и только тогда, когда он ограничен. Построен также пример, который показывает, что эта теорема неверна для общих линейных замкнутых операторов даже алгебраического типа [1].

Определение. Линейный замкнутый оператор называется рефлективным, если он переводит свою область определения в некоторое ее подмножество.

Пусть D_T и D_{T^2} — области определения замкнутого линейного оператора T и его квадрата T^2, соответственно. Тогда предыдущее определение эквивалентно равенству

$$D_{T^2} = D_T\,.$$

Докажем сначала следующую теорему:

Теорема 1. *Если T — замкнутый линейный рефлективный оператор в унитарном пространстве $\mathfrak{R}$, то существует положительная константа C такая, что*

$$\| T^2 f \|^2 \leqslant C^2 (\| f \|^2 + \| Tf \|^2),$$

где $\| T^2 f \|$, $\| Tf \|$ — нормы образов элемента f по отношению к операторам T^2 и T, соответственно.

Пусть $\mathfrak{V}_T$ — неймановский график (ср. [2]) оператора T, т. е. множество всех точек $\{f, Tf\}$ пространства $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$. Так как T — линейный замкнутый оператор, то $\mathfrak{V}_T$ — замкнутое линейное многообразие в $\mathfrak{R}^2$.

Мы можем рассматривать само $\mathfrak{V}_T$ как унитарное пространство и определить в нем линейный оператор Ω следующим образом:

$$\Omega \{f, Tf\} = \{Tf, T^2 f\} \quad \text{при } f \in D_T.$$

Очевидно, Ω — линейный замкнутый оператор в унитарном пространстве $\mathfrak{V}_T$, областью определения которого является все пространство $\mathfrak{V}_T$. Согласно обобщенной теореме Теплица [3], оператор Ω должен быть ограниченным, т. е. существует положительная константа C такая, что

$$\|\Omega g\| \leqslant C\|g\| \quad \text{при } g \in \mathfrak{B}_T. \tag{1}$$

Так как все элементы пространства $\mathfrak{B}_T$ имеют вид $\{f, Tf\}$, то мы можем положить

$$g = \{f, Tf\}$$

и вычислить нормы в предыдущем неравенстве:

$$\|\Omega g\| = \|\Omega\{f, Tf\}\| = \|\{Tf, T^2f\}\| = (\|Tf\|^2 + \|T^2f\|^2)^{1/2},$$

$$\|g\| = \|\{f, Tf\}\| = (\|f\|^2 + \|Tf\|^2)^{1/2}.$$

Тогда (1) примет вид

$$(\|Tf\|^2 + \|T^2f\|^2)^{1/2} \leqslant C(\|f\|^2 + \|Tf\|^2)^{1/2},$$

или

$$\|Tf\|^2 + \|T^2f\|^2 \leqslant C^2(\|f\|^2 + \|Tf\|^2).$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\|T^2f\|^2 \leqslant C^2(\|f\|^2 + \|Tf\|^2).$$

Из только что доказанной теоремы легко может быть получен следующий результат:

Следствие. Точечный спектр замкнутого линейного рефлективного оператора есть ограниченное множество.

Теорема 2. *Всякий рефлективный замкнутый нормальный оператор ограничен.*

Доказательство. Пусть T — замкнутый нормальный оператор. Согласно спектральной теореме [2], имеет место интегральное представление

$$T = \int_G z\, dK_z,$$

где K_z — спектральная функция нормального оператора T, а G — вся комплексная z-плоскость.

Мы имеем

$$\|Tf\|^2 = \int_G |z|^2\, d\|K_z f\|^2$$

и

$$\|T^2f\|^2 = \int_G |z|^4\, d\|K_z f\|^2.$$

Если T рефлективен, то, в силу теоремы 1, имеет место неравенство

$$\int_G |z|^4\, d\|K_z f\|^2 \leqslant C^2\left(\int_G |z|^2\, d\|K_z f\|^2 + \|f\|^2\right),$$

или

$$\int_G |z|^4\, d\|K_z f\|^2 \leqslant C^2 \int_G (|z|^2 + 1)\, d\|K_z f\|^2 \quad \text{при } f \in D_T.$$

Подинтегральная функция в левой части имеет больший порядок на бесконечности, чем подинтегральная функция в правой части;

отсюда мы заключаем, что спектр нормального оператора T ограничен. Следовательно, оператор T ограничен, и теорема доказана.

Теорема 3. *Всякий рефлективный замкнутый симметрический оператор ограничен.*

Доказательство. Пусть T — рефлективный замкнутый симметрический оператор. Рассмотрим произведение T^*T оператора T и его сопряженного T^*. Тогда T^*T — самосопряженный (следовательно, нормальный) оператор; он ограничен тогда и только тогда, когда ограничен оператор T. Поэтому достаточно показать, что T^*T ограничен.

Так как T симметричен, то T^* есть расширение оператора T; следовательно,

$$T^*Tf = T^2 f \quad \text{при } f \in D_{T^*T}.$$

В силу рефлективности оператора T легко видеть, что

$$(T^*T)^2 f = T^*T(T^2 f) = T^*(T^3 f) = T^4 f \quad \text{при } f \in D_{T^*T}.$$

Следовательно,

$$D_{(T^*T)^*} = D_{T^*T},$$

т. е. самосопряженный оператор T^*T рефлективен. Согласно теореме 2, отсюда следует, что T^*T ограничен.

Следует отметить, что теорема 3 неверна для общего линейного замкнутого оператора даже алгебраического типа. Противоречащий пример можно построить следующим образом.

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, состоящее из всех последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$ комплексных чисел таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ сходится.

Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ множество всех элементов пространства $\mathfrak{H}$ вида $(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3, \ldots)$, а через $\mathfrak{M}_2$ — множество всех элементов из $\mathfrak{H}$ вида $(0, \beta_1, \beta_1, \beta_2, \beta_2, \ldots)$.

Тогда:

1. $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — линейные замкнутые многообразия в $\mathfrak{H}$.
2. Пересечение многообразий $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ состоит из одного только элемента 0.
3. Сумма $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ (т. е. множество всех элементов вида $f_1 + f_2$, где $f_1 \in \mathfrak{M}_1$, $f_2 \in \mathfrak{M}_2$) плотна в $\mathfrak{H}$.
4. $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 \neq \mathfrak{H}$ (например, элемент $(1, -^1/_2, {}^1/_3, -^1/_4, {}^1/_5, -^1/_6, \ldots)$ не принадлежит $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$).

Мы можем теперь определить линейный оператор T на множестве $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$.

Положим

$$Tf_1 = f_1 \quad \text{для } f_1 \in \mathfrak{M}_1,$$

$$Tf_2 = 2f_2 \quad \text{для } f_2 \in \mathfrak{M}_2$$

и

$$T(f_1 + f_2) = f_1 + 2f_2.$$

В силу 1—4 легко видеть, что T — линейный замкнутый оператор, область определения которого плотна в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, но не совпадает со всем этим пространством.

Следовательно, оператор T неограничен.

То, что оператор T алгебраического типа, следует из соотношения:

$$(T - I)(T - 2I) f = 0 \quad \text{для } f \in D_T = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2.$$

где I — единичный оператор. Другими словами, оператор T удовлетворяет алгебраическому уравнению $(X-1)(X-2)=0$.

Пекинский национальный университет
Китай

Поступило
9 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Kober, Ann. of Math., 40, 549 (1939). [2] B. v. Sz. Nagy, Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, 1941. [3] J. v. Neumann, Ann. of Math., 33, 294 (1932).