**Доклады Академии Наук СССР**
**1951. Том LXXVI, № 4**

*МАТЕМАТИКА*

А. Г. ПОСТНИКОВ

# О СТРУКТУРЕ ДВУМЕРНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

*(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 XI 1950)*

В работе [1] А. Я. Хинчин доказывает следующую лемму:

Лемма Хинчина. *Если имеется последовательность различных рациональных чисел* $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}, \ldots, 0<q_1<q_2<\ldots<q_s<\ldots$, *таких, что* $\left|\theta-\frac{p_i}{q_i}\right|<\frac{c}{q_i^2}$, *то при* $t>8c$ $\frac{q_{n+t}}{q_n}>1+\frac{1}{30c^2}$.

А. Я. Хинчин дал довольно сложное доказательство этого факта, однако можно дать совсем простое доказательство.

Лемма. *Пусть имеются* $t$ *различных рациональных чисел,* $\frac{p_i}{q_i}$, $\left|\theta-\frac{p_i}{q_i}\right|<\frac{c}{q_i^2}$, $c>0$, $q_i>0$. *Обозначим* $\max q_i=Q$, $\min q_i=q$.

*Тогда* $\frac{Q}{q}>\sqrt{\frac{t-1}{2c}}$.

Доказательство. Расположим числа $\frac{p_i}{q_i}$ по убыванию их в личины:

$$\frac{p_t}{q_t}-\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_t}{q_t}-\frac{p_{t-1}}{q_{t-1}}+\frac{p_{t-1}}{q_{t-1}}-\frac{p_{t-2}}{q_{t-2}}+\ldots+\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_1}{q_1},$$

$$\frac{p_t}{q_t}-\frac{p_1}{q_1}\geqslant\frac{1}{q_t q_{t-1}}+\frac{1}{q_{t-1}q_{t-2}}+\ldots+\frac{1}{q_2 q_1}>\frac{t-1}{Q^2}.$$

С другой стороны:

$$\left|\frac{p_t}{q_t}-\frac{p_1}{q_1}\right|\leqslant\left|\frac{p_t}{q_t}-\theta\right|+\left|\frac{p_1}{q_1}-\theta\right|<\frac{c}{q_t^2}+\frac{c}{q_1^2}<\frac{2c}{q^2},$$

$$\frac{Q^2}{q^2}>\frac{t-1}{2c},\quad \frac{Q}{q}>\sqrt{\frac{t-1}{2c}},$$

ч. и т. д.

Эту оценку можно усилить. Пусть $c<1$. Расположим знаменатели в порядке возрастания $q=q_1<q_2<\ldots<q_t=Q$, $\frac{q_3}{q_1}>\sqrt{\frac{2}{2c}}=\sqrt{\frac{1}{c}}$, $\frac{q_5}{q_3}>\sqrt{\frac{1}{c}},\ldots,\frac{Q}{q}=\frac{q_3}{q_1}\frac{q_5}{q_3},\ldots,\frac{Q}{q}>\left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^{\left[\frac{t-1}{2}\right]}$. Здесь оценка показательная.

Этот факт касается структуры нормальных приближений числа, т. е. факт типа теории непрерывных дробей. Займемся обобщением его на двумерный случай.

Пусть имеется $N$ приближений формы

$$|q_i\theta_1 + p_i\theta_2 - r_i| < \frac{c}{q_i p_i}, \quad \theta_1 > 0, \quad \theta_2 > 0, \quad q_i > 0, \quad p_i > 0.$$

Обозначим $P = \max p_i$, $p = \min p_i$, $Q = \max q_i$, $q = \min q_i$. Возьмем плоскость $(v, t)$ и каждой системе чисел $(q_i, p_i, r_i)$ сопоставим точку на плоскости с координатами $t = \frac{q_i}{r_i}$, $v = \frac{p_i}{r_i}$. Получается $N$ точек. Возьмем выпуклую оболочку этих точек. Пусть $N = n + m$, где $n$ — число точек на границе, а $m$ — число точек внутри. Мы можем соединить эти точки отрезками так, чтобы получилась система треугольников, вершинами которых являлись бы эти точки (это легко доказывается индукцией по числу внутренних точек). Очевидно, это можно сделать, вообще говоря, неоднозначно. Однако можно доказать, что число треугольников будет всегда $n + 2m - 2$.

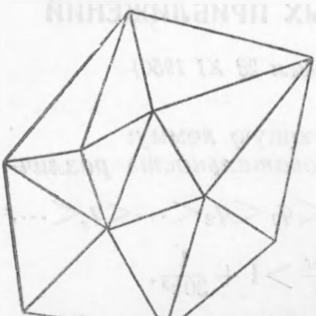

Рис. 1

Пусть у нас есть на плоскости $(t, v)$ некоторая область. Рассмотрим два интеграла: $I_1 = \iint\limits_S \frac{dv\,dt}{v^3}$, $I_2 = \iint\limits_S \frac{dv\,dt}{t^3}$. Если $S$ — треугольник с вершинами $(t_1, v_1)$, $(t_2, v_2)$, $(t_3, v_3)$, то

$$I_1 = \frac{1}{2v_1v_2v_3}\left|\begin{vmatrix} t_1 & v_1 & 1 \\ t_2 & v_2 & 1 \\ t_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}\right|,$$

$$I_2 = \frac{1}{2t_1t_2t_3}\left|\begin{vmatrix} t_1 & v_1 & 1 \\ t_2 & v_2 & 1 \\ t_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

Возьмем нашу область (рис. 1), разобьем ее на $n + 2m - 2$ треугольников

$$I_1 = \iint\limits_S \frac{dv\,dt}{v^3} = \sum \frac{\left|\begin{vmatrix} q_i & p_i & r_i \\ q_i' & p_i' & r_i' \\ q_i'' & p_i'' & r_i'' \end{vmatrix}\right|}{2p_i p_i' p_i''} \geqslant \frac{n + 2m - 2}{2P^3}$$

(каждый определитель есть целое число и не равен нулю, потому что площадь треугольника не равна нулю).

Аналогично,

$$I_2 \geqslant \frac{n + 2m - 2}{2Q^3}.$$

С другой стороны, применяя формулу Римана:

$$I_1=\iint\limits_S \frac{dv\,dt}{v^3}=\frac{1}{2}\iint\limits_S \frac{-\partial(1/v^2)}{\partial v}\,dt\,dv=\frac{1}{2}\int\limits_L \frac{dt}{v^2},$$

где $L$ — многоугольник, ограничивающий фигуру.

Интеграл по одной стороне с концами $(t_1, v_1)$ и $(t_2, v_2)$

$$v=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}(t-t_1)+v_1,\quad t=t_1+\frac{t_2-t_1}{v_2-v_1}(v-v_1),$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{v^2}=\frac{1}{2}\,\frac{t_2-t_1}{v_2-v_1}\int\limits_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v^2}=\frac{1}{2}\,\frac{t_2-t_1}{v_2-v_1}\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{t_2-t_1}{v_1v_2}.$$

Для нашей области это равно $\dfrac{1}{2p_1p_2}\begin{vmatrix} r_1 & r_2\\ q_1 & q_2\end{vmatrix}$,

$$I_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\begin{vmatrix} r_1 & r_2\\ q_1 & q_2\end{vmatrix}}{p_1p_2}+\frac{\begin{vmatrix} r_2 & r_3\\ q_2 & q_3\end{vmatrix}}{p_2p_3}+\ldots+\frac{\begin{vmatrix} r_n & r_1\\ q_n & q_1\end{vmatrix}}{p_np_1}\right).$$

Так как

$$\frac{\begin{vmatrix} \theta_2p_1 & \theta_2p_2\\ q_1 & q_2\end{vmatrix}}{p_1p_2}+\frac{\begin{vmatrix} \theta_2p_2 & \theta_2p_3\\ q_2 & q_3\end{vmatrix}}{p_2p_3}+\ldots+\frac{\begin{vmatrix} \theta_2p_n & \theta_2p_1\\ q_n & q_1\end{vmatrix}}{p_np_1}=0,$$

то отсюда

$$I_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\begin{vmatrix} r_1 & r_2\\ q_1 & q_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \theta_2p_1 & \theta_2p_2\\ q_1 & q_2\end{vmatrix}}{p_1p_2}+\ldots+\frac{\begin{vmatrix} r_n & r_1\\ q_n & q_1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \theta_2p_n & \theta_2p_1\\ q_n & q_1\end{vmatrix}}{p_np_1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\begin{vmatrix} r_1-\theta_2p_1-\theta_1q_1 & r_2-\theta_2p_2-\theta_1q_2\\ q_1 & q_2\end{vmatrix}}{p_1p_2}+\ldots+\frac{\begin{vmatrix} r_n-\theta_2p_n-\theta_1q_n & r_1-\theta_2p_1-\theta_1q_1\\ q_n & q_1\end{vmatrix}}{p_np_1}\right),$$

$$|I_1|<\frac{c}{2}\left(\frac{q_2\dfrac{1}{p_1q_1}+q_1\dfrac{1}{p_2q_2}}{p_1p_2}+\ldots+\frac{q_1\dfrac{1}{p_nq_n}+q_n\dfrac{1}{p_1q_1}}{p_np_1}\right)\leqslant\frac{c}{2}\,n\,\frac{2Q}{qp^3}.$$

Итак,

$$\frac{n+2m-2}{2P^3}<nc\frac{Q}{qp^3},$$

$$\frac{n+2m-2}{2n}\,\frac{1}{c}<\frac{Q}{q}\left(\frac{P}{p}\right)^3.$$

Аналогично,

$$\frac{n+2m-2}{2n}\,\frac{1}{c}<\frac{P}{q}\left(\frac{Q}{q}\right)^3.$$

Теорема.

$$\frac{n+2m-2}{2n}\,\frac{1}{c}<\frac{Q}{q}\left(\frac{P}{p}\right)^3,$$

$$\frac{n+2m-2}{2n}\,\frac{1}{c}<\frac{P}{q}\left(\frac{Q}{q}\right)^3.$$

Следствие.

$$\frac{n+2m-2}{2n}\,\frac{1}{c}<\left(\frac{QP}{qp}\right)^{2}.$$

(надо два равенства перемножить и извлечь корень).

Поступило
27 XI 1950

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Rendic. Circ. mat. Palermo, 50, 170 (1926).