Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

П. В. НИКОЛАЕВ

О НОМОГРАФИРОВАНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 XI 1950)

Вопрос о прямой (без A-множителя) анаморфозе уравнения $F(t_1, t_2, t_3)=0$ в номографии достаточно изучен [1,2]. Что касается анаморфозы с A-множителем аналитического уравнения, то известны лишь некоторые способы, относящиеся к тому случаю, когда A-множитель содержит только две переменных [3,4].

В данной работе указывается способ номографирования алгебраического M-уравнения

$$F(t_1, t_2, t_3)=0, \tag{1}$$

допускающего какой-либо A-множитель.

Как известно, A-множитель $\psi_1(t_2, t_3)$ могут допускать лишь уравнения типа $[2; r; r]$ и $[3; r; r]$ $(r \geqslant 2)$ и A-множитель с тремя переменными лишь уравнения типа $[r; r; r]$ $(r \geqslant 2)$ [5,6]. Во всех этих случаях задача может быть приведена к бирациональному (т. е. нормальному) уравнению. Именно, каждое M-уравнение (1) может быть представлено в следующей форме:

$$f(\tau_1, \tau_2, \tau_3)=0, \tag{2}$$

$$\varphi_i(t_i, \tau_i) \equiv \varphi_{i1}(t_i) - \tau_i \varphi_{i2}(t_i) = 0 \quad (i=1, 2, 3), \tag{3}$$

где (2) — некоторая бирациональная часть уравнения (1); τ_i — бирациональные параметры. $F(t_1, t_2, t_3)$ — результант по τ_i системы полиномов (2) и (3) [6]. Присоединив к анаморфозе уравнения (2) уравнения (3), получим анаморфозу данного уравнения (1).

В способ выделения бирациональной части (2), указанный ранее автором [5], могут быть внесены существенные упрощения.

Пусть $F(t_1, t_2, t_3)$ — полином степени n относительно t_1:

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv t_1^n \varphi_0(t_2, t_3) + t_1^{n-1}\varphi_1(t_2, t_3) + \ldots + \varphi_n(t_2, t_3) \tag{4}$$

и

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv \sum_{l=1}^{r} f_{1l}(t_1) F_l(t_2, t_3) \tag{5}$$

его каноническое по t_1 разложение (5). Заметим, что для бирационального M-уравнения (1), допускающего A-множитель с t_1, каноническое по t_1 разложение будет иметь $n+1$ членов, т. е. будет вида (4); это непосредственно следует из теорем о связи между размерностью уравнения и порядком базисов в его номограммах [6].

Докажем следующую теорему, устанавливающую необходимый признак существования A-множителя.

Теорема. *Если уравнение* (1) — *M-уравнение с A-множителем, содержащим переменную* t_1, *и* (5) — *его каноническое по* t_1 *разложение, то*:

а) *за бирациональный по* t_1 *параметр* τ_1 *может быть принято отношение*

$$\tau_1 = \frac{f_{1,\, r-1}(t_1)}{f_{1r}(t_1)}; \tag{6}$$

б) *при этом рациональная функция* $\frac{f_{1i}(t_1)}{f_{1r}(t_1)}$ — *полином от* τ_1 *степени* $r-i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Пусть $\theta_1 = \frac{\psi_1(t_1)}{\psi_2(t_1)}$ — некоторый бирациональный по t_1 параметр уравнения (1), где ψ_1 и ψ_2 — полиномы степеней, соответственно, μ и ν. Будем считать, что $\mu > \nu$; это, очевидно, возможно при надлежащем выборе θ_1. Но θ_1 является примитивным элементом поля, определенного рациональными функциями $\frac{f_{1i}(t_1)}{f_{1r}(t_1)}$ $(i = 1, \ldots, r)$ разложения (5) [6], и поэтому эти функции выразятся через θ_1 рационально. Пусть эта замена выполнена; полученная бирациональная по t_1 часть уравнения (1) будет, очевидно, иметь каноническое по θ_1 разложение вида

$$\sum_{i=1}^{r} \theta_1^{r-i} \overline{F}_i(t_2, t_3) = 0. \tag{7}$$

Если, обратно, заменить θ_1 через t_1 в уравнении (7), то найдем базисное по t_1 [1] разложение уравнения (1)

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv \sum_{i=1}^{r} \varphi_{1i}(t_1) \overline{F}_i(t_2, t_3) = 0, \tag{8}$$

где, для сокращения, положено

$$\varphi_{1i}(t_1) \equiv [\psi_1(t_1)]^{r-i} [\psi_2(t_1)]^i. \tag{9}$$

Сравнивая базисные разложения (5) и (8), найдем [1], что

$$f_{1i} \equiv \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \varphi_{1k} \quad (i = 1, \ldots, r), \tag{10}$$

где a_{ik} — постоянные. Нетрудно показать, что степени f_{1i} и φ_{1i} равны, т. е. постоянные $a_{ik} = 0$ при $k < i$. Но это означает, что $\tau_1 = \frac{f_{1,\, r-1}(t_1)}{f_{1r}(t_1)}$ является линейной функцией от θ_1, и поэтому τ_1, действительно, может быть принято за бирациональный параметр.

Далее, отношение $\frac{f_{1i}}{f_{1r}}$ в силу (10) и $k < i$ будет степени $r-i$ по θ_1, а следовательно, и по τ_1; этим теорема доказана.

Будем теперь считать, что условия теоремы выполнены и (1) — бирациональное уравнение.

Если оно допускает A-множитель $\psi_3(t_1, t_2)$, то нетрудно обосновать следующий способ определения проективитета между t_1 и t_2 [5] на общем базисе этих переменных.

Пусть $t_1 = t_{11}$, $t_2 = t_{22}$, $t_3 = t_{34}$ и $t_1 = t_{11}$, $t_2 = t_{23}$, $t_3 = t_{34}$ — два каких-либо нуля данного уравнения (1). Если $D_1(t_1)$ — общий наибольший делитель полиномов $F(t_1, t_{22}, t_{34}) \not\equiv 0$ и $F(t_1, t_{23}, t_{34}) \not\equiv 0$, то единственный корень $t_1 = t_{13}$ полинома $\frac{F(t_1, t_{22}, t_{34})}{D_1(t_1)}$ принадлежит той же точке номограммы, что и $t_2 = t_{23}$. Корень (единственный) $t_1 = t_{12}$ полинома $\frac{F(t_1, t_{23}, t_{31})}{D_1(t_1)}$ принадлежит вместе с $t_2 = t_{23}$ также одной и той же точке номограммы. Аналогично определяется точка $t_2 = t_{21}$, совпадающая с точкой $t_1 = t_{11}$. Зная же три пары (t_{1i}, t_{2i}) $(i = 1, 2, 3)$ соответствующих в проективитете точек, легко определить A-множитель $\psi_3(t_1, t_2)$. Отыскание анаморфозы (если она существует) можно выполнить с помощью A-матриц ([2]) полинома $\Phi(t_1, t_2, t_3) \equiv \psi_3(t_1, t_2) F(t_1, t_2, t_3)$.

Если уравнение (1) допускает A-множитель с тремя переменными, то, зная те же два нуля уравнения (1), можно аналогично определить второй проективитет (между t_2 и t_3), а следовательно, будет известен и третий (между t_1 и t_3), т. е. определим A-множитель; отыскание анаморфозы (если она существует) может быть выполнено опять с помощью A-матриц соответствующего полинома $\Phi(t_1, t_2, t_3)$.

Важно отметить, что из существования анаморфозы для заданного M-уравнения (1) с вещественными коэффициентами будет следовать возможность построения для него номограммы. Именно, справедлива теорема:

Теорема. *Вещественное M-уравнение* (1) *допускает вещественную же анаморфозу*

$$\Phi(t_1, t_2, t_3) \equiv |f_{i1}(t_i) f_{i2}(t_i) f_{i3}(t_i)|, \tag{11}$$

т. е. анаморфозу, в которой рациональные функции $\frac{f_{ik}(t_i)}{f_{i3}(t_i)}$ $(i = 1, 2, 3;$ $k = 1, 2)$ *вещественны.*

Для M-уравнения типа [2; 2; 2] теорема очевидна. Теорема справедлива также для того случая, когда $\Phi(t_1, t_2, t_3) \equiv F(t_1, t_2, t_3)$ ([2]).

Достаточно теперь показать, что A-множитель уравнения (1) не может быть комплексным (не чисто мнимым). Если допустить противное, то окажется, что наряду с анаморфозой (11) для заданного уравнения (1) существует также его анаморфоза

$$\overline{\Phi}(t_1, t_2, t_3) \equiv |\overline{f}_{i1}(t_i) \overline{f}_{i2}(t_i) \overline{f}_{i3}(t_i)| \tag{12}$$

с комплексно сопряженными (11) элементами, но это противоречит теореме об единственности анаморфоз M-уравнений ([5]), так как анаморфозы (11) и (12) не могут быть проективны.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова

Поступило
26 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. В. Николаев, ДАН, 67, № 3 (1949). [2] П. В. Николаев, ДАН, 68, № 2 (1949). [3] O. D. Kellog, Zs. f. Math. u. Phys., 63, 159 (1914). [4] С. В. Бахвалов, Сб. Математика в СССР за 30 лет, 1917 — 1947, стр. 815, 1948. [5] П. В. Николаев, Матем. сборн., 17, (59), № 2 (1944). [6] П. В. Николаев, ДАН, 76, № 3 (1951).