Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. М. ЛЕВИТАН

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 XII 1950)

1. Рассмотрим класс непрерывных функций, представимых в виде

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\sigma(\lambda)\quad(0\leqslant x\leqslant\infty).$$

Мы будем предполагать, что интеграл справа сходится абсолютно, т. е. для всех действительных x

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\cos\sqrt{\lambda}\,x|\,|d\sigma(\lambda)|<\infty.$$

Таким образом, $\sigma(\lambda)$ есть (вообще говоря) комплексная функция, имеющая ограниченную вариацию на всей действительной оси. Мы будем предполагать в дальнейшем, что $\sigma(\lambda)$ непрерывна справа, т. е.

$$\sigma(\lambda+0)=\sigma(\lambda). \tag{1}$$

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Пусть для всех действительных* x

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\sigma(\lambda)=0.$$

Если существует такое фиксированное число $\alpha<2$, *что для всех достаточно больших* $x>0$ *выполняется неравенство*

$$\int_{-\infty}^{0}\cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\sigma(\lambda)<\exp(x^{\alpha}), \tag{2}$$

то $\sigma(\lambda)=\mathrm{const}$.

Доказательство. Положим

$$f(x)=\int_{-\infty}^{0}\cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\sigma(\lambda)+\int_{0}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\sigma(\lambda)=f_1(x)+f_2(x).$$

Так как, по условию, для действительных x $f(x)=0$, то для действительных x $f_1(x)=-f_2(x)$ есть ограниченная функция. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{\lambda}\, z\, d\sigma(\lambda) \quad (z = x + iy).$$

Из оценки (2) следует, что $F(z)$ есть целая аналитическая функция, а также для достаточно больших $|z|$ оценка

$$|F(z)| \leqslant \int_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{\lambda}\,|z|\,|d\sigma(\lambda)| < \epsilon \exp(|z|^{\alpha}). \tag{3}$$

Далее,

$$F(iy) = \int_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{|\lambda|}\, y\, d\sigma(\lambda).$$

Поэтому для чисто мнимых $z = iy$ $F(z) = F(iy)$ есть ограниченная функция. Для действительных $z = x$ $F(z) = F(x) = f_1(x)$, и ранее была показана ограниченность этой функции. Оценка (3) дает возможность применить теорему Фрагмена — Линделефа и, следовательно, $F(z) = \text{const}$. Поэтому $f_1(x) = F(x) = \text{const}$ и, значит,

$$f_2(x) = -f_1(x) = \int_{0}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}\, x\, d\sigma(\lambda) = \text{const}.$$

В силу единственности представления функции в виде интеграла Фурье — Стильтьеса из последнего равенства следует, что $\sigma(\lambda)$ для положительных λ может иметь единственную точку роста в нуле.

В силу (1) $\sigma(+0) = \sigma(0)$. Поэтому $f_2(x) = 0$. Следовательно, $f_1(x) = 0$, а значит, и $F(z) = 0$. Для чисто мнимых z мы получим

$$F(iy) = \int_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{|\lambda|}\, y\, d\sigma(\lambda) = 0.$$

Поэтому $\sigma(\lambda)$ не имеет точек роста и для отрицательных λ. Теорема доказана.

Если для некоторого $c > -\infty$ $\sigma(\lambda) = \text{const}$ для $\lambda < c$, то для достаточно больших x

$$\int_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{\lambda}\, x\, |d\sigma(\lambda)| = \int_{c}^{0} \cos\sqrt{\lambda}\, x\, |d\sigma(\lambda)| < Ae^{\sqrt{|c|}\, x},$$

и, следовательно, оценка (2) выполняется. Поэтому имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Представление непрерывной функции $f(x)$ в виде*

$$f(x) = \int_{c}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}\, x\, d\sigma(\lambda) \quad (c > -\infty)$$

единственно.

2. Укажем одно применение теоремы 2 к самосопряженным дифференциальным операторам второго порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\, y = 0, \tag{4}$$

где λ — действительное число и $q(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \infty)$ — непрерывная в каждом конечном интервале действительная функция. Зафиксируем положительное число h и обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение уравнения (4), удовлетворяющее граничному условию

$$y'(0) - hy(0) = 0. \tag{5}$$

Можно показать (см., например, [1]), что для данного $q(x)$ и данного h существует, по крайней мере, одна монотонно возрастающая, ограниченная в каждом конечном интервале функция $\rho(\lambda)$, обладающая тем свойством, что если $f(x)$: 1) обращается в нуль вне конечного интервала, 2) удовлетворяет граничному условию (5) и 3) имеет непрерывную вторую производную, то

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \lambda) E(\lambda) d\rho(\lambda), \tag{6}$$

где

$$E(\lambda) = \int_{0}^{\infty} f(x) \varphi(x, \lambda) dx$$

и для всех $x \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x, \lambda)| |E(\lambda)| d\rho(\lambda) < \infty.$$

Г. Вейль показал [2], что если $\inf q(x) > -\infty$, то функция $\rho(\lambda)$ в существенном единственна. Хотя этот факт у Вейля доказан очень просто, нам представляется все же целесообразным показать, как он следует из теоремы 2.

Обозначим через b произвольное положительное число и рассмотрим граничную задачу, определяемую уравнением (4), граничным условием (5) и граничным условием в точке b:

$$y'(b) + Hy(b) = 0,$$

где H — произвольное положительное число. Пусть $\inf q(x) \geqslant A > -\infty$ и $\varphi(x, \lambda_1)$ — нормированная собственная функция рассматриваемой задачи, отвечающая наименьшему собственному значению λ_1. Оценим λ_1 снизу. Имеем:

$$\lambda = \lambda_1 \int_0^b \varphi^2(x, \lambda_1) dx = \int_0^b \varphi(x, \lambda_1) \{q(x) \varphi(x, \lambda_1) - \varphi''(x, \lambda_1)\} dx =$$

$$= \int_0^b q(x) \varphi^2(x, \lambda_1) dx + H\varphi^2(b, \lambda_1) + h\varphi^2(0, \lambda_1) + \int_0^b \varphi'^2(x, \lambda_1) dx > A.$$

Поэтому оценка λ_1 снизу не зависит от b. Так как разложение в интервале $(0, \infty)$ можно получить из разложения в интервале $(0, b)$, устремляя b к бесконечности [1], то найдется такое число $c > -\infty$, что для $\lambda < c$ $\rho(\lambda) = \mathrm{const}$. Поэтому в рассматриваемом случае разложение (6) имеет вид

$$f(x) = \int_c^{\infty} \varphi(x, \lambda) E(\lambda) d\rho(\lambda). \tag{7}$$

Пусть имеется вторая функция $\rho_1(\lambda)$, так что наряду с разложением (7) имеет место разложение

$$f(x) = \int_c^{\infty} \varphi(x, \lambda) E(\lambda) d\rho_1(\lambda)$$

и, следовательно, для всех $x \geqslant 0$

$$\int_c^\infty \varphi(x, \lambda) E(\lambda) d\sigma(\lambda) = 0, \tag{8}$$

где $\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \rho_1(\lambda)$.

Как известно ([3]), существует оператор Вольтерра A_x, переводящий $\varphi(x, \lambda)$ в $\cos\sqrt{\lambda}\, x$:

$$A_x \varphi(t, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) \varphi(t, \lambda) dt = \cos\sqrt{\lambda}\, x,$$

причем функция $K(x, t)$ непрерывна в каждой конечной области. Применяя к (8) оператор A_x, мы получим

$$\int_0^\infty \cos\sqrt{\lambda}\, x E(\lambda) d\sigma(\lambda) = 0,$$

и, следовательно, на основании теоремы 2, если λ_1 и λ_2 — точки непрерывности функции $\sigma(\lambda)$, то

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E(\lambda) d\sigma(\lambda) = 0. \tag{9}$$

Покажем, что для любого фиксированного интервала $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$ можно подобрать такую функцию $f(x)$, что $E(\lambda)$ для $\lambda \subset \Delta$ сколь угодно мало отличается от единицы. Если $h \neq \infty$, то $\varphi(0, \lambda) \neq 0$. Не нарушая общности рассуждений, можно принять $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = h$. Обозначим через ε произвольное положительное число, и пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $f(x) \geqslant 0$, 2) $f(x) = 0$ для $x > \varepsilon$, 3) $f'(0) - hf(0) = 0$, 4) $f''(x)$ непрерывна и 5) $\int_0^\varepsilon f(x) dx = 1$.

Положим $E(\lambda) = \int_0^\varepsilon f(x) \varphi(x, \lambda) dx$.

Выберем $\eta > 0$ произвольно. Так как $\varphi(0, \lambda) = 1$, то, зафиксировав интервал Δ, можно выбрать ε столь малым, что для $\lambda \subset \Delta$ и $x \leqslant \varepsilon$ $|\varphi(x, \lambda) - 1| < \eta$. Из условия 5) следует $(\lambda \subset \Delta)$ $|E(\lambda) - 1| \leqslant \leqslant \int_0^\varepsilon f(x) |\varphi(x, \lambda) - 1| dx < \eta$.

Полагая $\eta \to 0$ и принимая во внимание, что $\sigma(\lambda)$ имеет ограниченную вариацию, мы получим из (9) $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\sigma(\lambda) = 0$, т. е. $\sigma(\lambda) = \text{const}$, что и доказывает единственность функции $\rho(\lambda)$.

Если $h = \infty$, то $\varphi(0, \lambda) = 0$. Этот случай разбирается аналогично.

Поступило
7 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям..., 1950. [2] H. Weyl, Math. Ann., 68, 220 (1910). [3] Б. М. Левитан, Усп. матем. наук, 4 (29), в. 1, 3 (1949).