Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

ОПЕРАТОРЫ С МОНОТОННЫМИ МИНОРАНТАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 XII 1950)

М. Г. Крейну и М. А. Рутману принадлежит разработка основных понятий и положений теории операторов, оставляющих инвариантным конус в некотором банаховом пространстве (см. ([1]), где эти исследования систематизированы). В частности, ими были получены признаки существования собственных векторов у некоторых монотонных положительных операторов.

Оказывается, что „конусные" методы приложимы и при изучении немонотонных операторов. В настоящей заметке мы приводим некоторые результаты, полученные в этом направлении.

Вторая часть заметки посвящена изучению структуры множества собственных векторов положительных операторов.

1°. Приведем ряд определений из ([1]).

Пусть E—банахово пространство. Замкнутое выпуклое множество $K\subset E$ называется конусом, если из $x\in K$ следует, что $tx\in K$ при всех $t\geqslant 0$, и если из каждой пары элементов $x, -x$ ($\|x\|\neq 0$) по крайней мере один не лежит в K. Конус K позволяет ввести в E полуупорядоченность: пишут $x\leqslant y$ или $y\geqslant x$ ($x, y\in E$), если $y-x\in K$. В частности, $x\geqslant\theta$, если $x\in K$ (θ — нуль пространства E).

Оператор A (вообще говоря, нелинейный), действующий в E, называется положительным, если $AK\subset K$. Оператор A называется монотонным, если из $x\leqslant y$ следует, что $Ax\leqslant Ay$.

Общий путь установления существования собственных векторов у вполне непрерывных положительных операторов заключается в следующем: отыскивают собственные вектора близких к исследуемому операторов и совершают предельный переход, который оказывается возможным в случае, когда собственные числа близких операторов ограничены сверху.

При доказательстве теорем, приводимых в настоящей заметке, мы определяли „близкие" к изучаемому оператору B операторы B_n формулой

$$B_n x = B\left(x+\frac{v}{n}\right),$$

где v — соответствующим образом подобранный элемент из конуса.

Оценка собственных чисел производилась при помощи леммы:

Лемма. *Пусть A — монотонный положительный оператор. Пусть для некоторого такого элемента $u\in E$, что $-u\bar{\in} K$,*

$$cA(tu)\geqslant tu \quad (0\leqslant t\leqslant\gamma), \tag{1}$$

где $c, \gamma > 0$. *Пусть для некоторого* $x \in K$, $x - \gamma u \overline{\in} K$,

$$x \geqslant \alpha A x, \quad x \geqslant \beta u \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Тогда обязательно $\alpha \leqslant c$.

Важность условий типа (1) при установлении существования собственных векторов была впервые выяснена М. А. Рутманом в его кандидатской диссертации ([2]).

2°. Будем говорить, что вполне непрерывный оператор B имеет монотонную миноранту A, если оператор A монотонен, положителен, вполне непрерывен и удовлетворяет условию (1) на некотором элементе $u \in E$, $-u \overline{\in} K$, и если на всех элементах конуса выполняется соотношение

$$Bx \geqslant Ax.$$

Для простоты будем ниже считать, что $\gamma = \infty$ в условии (1) для оператора A.

Теорема 1. *Вполне непрерывный оператор с монотонной минорантой имеет в конусе собственные вектора любой нормы.*

Приведенная теорема содержит, в частности, ряд признаков М. А. Рутмана существования собственного вектора для монотонных операторов, содержащихся в § 9 статьи ([1]) (как указано в введении к ([1]), результаты эти принадлежат М. А. Рутману).

3°. При доказательстве существования собственных векторов у положительных операторов обычно ([1, 2]) пользуются леммой Роте ([3]), вытекающей из принципа Шаудера неподвижной точки, из которой следует существование собственного вектора у положительного вполне непрерывного оператора A на пересечении сферы S с конусом K, если

$$\inf_{x \in S \cap K} \| Ax \| > 0.$$

Эта лемма позволяет установить существование собственных векторов различной нормы, однако не позволяет исследовать структуру множества собственных векторов в конусе.

Будем говорить, что множество F собственных векторов образует непрерывную ветвь (ср. определение в ([4])), если граница каждого открытого множества, содержащего θ, имеет общие точки с F.

Теорема 2. *Множество собственных векторов вполне непрерывного оператора с монотонной минорантой образует в конусе непрерывную ветвь.*

Отсюда следует, в частности, что множество собственных векторов монотонных положительных операторов (существование которых установлено в § 9 статьи ([1])) образует в конусе непрерывную ветвь.

При доказательстве теоремы 2 вместо леммы Роте мы пользовались следующим утверждением.

Лемма. *Пусть S — граница некоторого открытого множества, содержащего θ. Пусть положительный вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию*:

$$\inf_{x \in S \cap K} \| Ax \| > 0.$$

Тогда оператор A на $S \cap K$ имеет собственные вектора.

Отметим в заключение параграфа, что теоремы 1 и 2 аналогично формулируются для случая, когда исследование проводится на пересечении конуса с некоторым шаром, — здесь, естественно, устанавливается существование непрерывной ветви положительных собственных векторов в шаре.

4°. Теоремы 1 и 2 непосредственно применяются к установлению существования положительных собственных функций у нелинейных интегральных уравнений.

Рассмотрим уравнение Гаммерштейна

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, y) f[y, \varphi(y)] \, dy. \tag{2}$$

Будем предполагать при этом, что выполнены условия, обеспечивающие полную непрерывность оператора, определенного правой частью уравнения (2), в соответствующем функциональном пространстве C или L^p.

В случае, когда ядро $K(x, y)$ удовлетворяет условию

$$0 < m \leqslant K(x, y) \leqslant M < \infty \quad (x, y \in G),$$

существование непрерывной ветви положительных собственных функций в соответствующем функциональном пространстве следует уже из условия

$$f(x, u) \geqslant S(u) \quad (x \in G, \ 0 \leqslant u < \infty), \tag{3}$$

где $S(u)$ — неотрицательная неубывающая функция.

В случае же, если на неотрицательное ядро $K(x, y)$ наложено более слабое ограничение

$$\int_G K(x, y) \, dy \geqslant \alpha > 0 \quad (x \in G),$$

то для существования непрерывной ветви положительных собственных функций у уравнения (2) нужно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$f(x, u) \geqslant \beta u \quad (x \in G, \ 0 \leqslant u < \infty), \tag{4}$$

где β — некоторое положительное число.

Рассмотрим несколько более общее уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K[x, y, \varphi(y)] \, dy. \tag{5}$$

Пусть $K(x, y, u)$ $(a \leqslant x, \ y \leqslant b, \ 0 \leqslant u < \infty)$ непрерывная по всем переменным функция, удовлетворяющая условию

$$K(x, y, u) \geqslant A(x, y, u) \quad (a \leqslant x, y \leqslant b, 0 \leqslant u < \infty), \tag{6}$$

где $A(x, y, u)$ — неотрицательная, непрерывная по всем переменным функция, не убывающая по u, причем $A'_u(x, y, 0)$ непрерывна, неотрицательна и

$$\int_a^b A'_u(x, y, 0) \, dy > 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Тогда уравнение (5) имеет непрерывную ветвь положительных собственных функций.

Уравнение (5) изучалось „конусными“ методами в (1) (при ограничениях, обеспечивающих монотонность соответствующих операторов). Отметим, что условия последнего утверждения § 9 в (1) недостаточны — они не обеспечивают положительности оператора.

Заметим еще, что из выполнения условий (3), (4) или (6) лишь для значений u из некоторого сегмента следует существование непрерывной ветви положительных собственных функций лишь в пересечении конуса с некоторым шаром пространства C непрерывных функций.

Для уравнений Лихтенштейна

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \int_G \ldots \int_G K_n(x; y_1, \ldots, y_n)\, \varphi(y_1) \ldots \varphi(y_n)\, dy_1 \ldots dy_n$$

(где все ядра непрерывны и оператор, определенный правой частью, вполне непрерывен в единичном шаре пространства C непрерывных на G функций) существование собственных функций малой нормы следует [4] уже из существования у ядра $K_1(x, y)$ собственного числа нечетной кратности и, в частности, в силу теоремы Ентча [5], из выполнения условия

$$\int_G K_1(x, y)\, dy \geqslant \alpha > 0 \quad (x \in G). \tag{7}$$

Если ядро $K_1(x, y)$ удовлетворяет условию (7), а остальные ядра неотрицательны, то существование непрерывной ветви положительных собственных функций в единичном шаре пространства C следует из теорем 1 и 2 (существование собственных функций вытекает и из результатов М. А. Рутмана). В случае, если $K_1(x, y) \equiv 0$, исследование несколько усложняется и для установления существования непрерывной ветви положительных собственных функций нам приходится требовать, чтобы все ядра, не равные тождественно нулю, удовлетворяли условию

$$0 < m \leqslant K_n(x; y_1, \ldots, y_n) \leqslant M < \infty \quad (x, y_1, \ldots, y_n \in G).$$

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
4 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн и М. А. Рутман, Усп. матем. наук, в. 23 (1948). [2] М. А. Рутман, ДАН, 18, № 9 (1938); Матем. сборн., 8 (50) (1948). [3] E. Rothe, Am. Journ. Math., 66, № 8 (1939). [4] М. А. Красносельский, ДАН, 73, № 1 (1950). [5] R. Jentsch, Journ. f. reine u. angew. Math., 141, 235 (1912).