Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

И. Ц. ГОХБЕРГ

О ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 XII 1950)

В настоящей работе устанавливаются необходимые и достаточные условия того, что для линейного оператора A имеет место известная теория Ф. Нетера (см., например, [2]).

Теорема 1 по существу является обобщением теоремы 1 С. М. Никольского (см. [1]).

Будем рассматривать дистрибутивные ограниченные операторы, определенные на всем нормированном пространстве R (в R определено умножение на комплексные числа [1]).

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1°. *Однородные уравнения $Ax=0$ и $\bar{A}X=0$ имеют конечные числа решений, оператор A нормально разрешим и разность между числами решений уравнений $Ax=0$ и $\bar{A}X=0$ равна $\varkappa(A)=\varkappa$, причем $\varkappa\leqslant 0$ ($\varkappa\geqslant 0$).*

2°. *Оператор A представим в виде суммы двух линейных операторов*

$$A=D+T,$$

где D имеет обратный слева (справа), уравнение $\bar{D}X=0$ ($Dx=0$) имеет ровно $-\varkappa$ ($\varkappa$) решений и T вполне непрерывный оператор.*

3°. *Оператор A представим в виде суммы двух операторов*

$$A=D+K,$$

из которых D имеет обратный слева (справа). Уравнение $\bar{D}X=0$ ($Dx=0$) имеет $-\varkappa$ ($\varkappa$) решений и K — конечномерный оператор.

4°. *Оператор $\bar{A}$ представим в виде:*

$$\bar{A}=D^*+K^* \;{}^{**},$$

где D^* имеет обратный справа (слева), уравнение $D^*X=0$ ($\bar{D}^*\Psi=0$) имеет $-\varkappa$ ($\varkappa$) решений и K^* — конечномерный оператор.

5°. *Оператор $\bar{A}$ можно представить в виде:*

$$\bar{A}=D^*+T^*,$$

* Говорим, что оператор D имеет обратный слева (справа), если существует ограниченный оператор D^{-1}, определенный на всем пространстве, такой, что $D^{-1}D=E$ ($DD^{-1}=E$).

** Операторы D^* и K^* определены в $\bar{R}$.

где D^* имеет обратный справа (слева), уравнение $D^*X = 0$ ($\overline{D^*}\Psi = 0$) имеет $-\varkappa$ ($\varkappa$) решений и оператор T^* вполне непрерывный.

Свойства 1°, 2°, 3° эквивалентны между собой. Во-первых, покажем, что из свойства 1° следует свойство 3°. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x$ — линейно независимая система решений уравнения $Ax = 0$; $X_1, X_2, \ldots, X_{k'}$ — линейно независимая система решений уравнения $\overline{A}X = 0$ и пусть системы $f_1, f_2, \ldots, f_k$; $y_1, y_2, \ldots, y_{k'}$ соответственно биортогональны к системам решений уравнений $Ax = 0$ и $\overline{A}X = 0$. Рассмотрим оператор $A_1 x = Ax + \sum_{i=1}^{k} f_i(x)\, y_i$.

Уравнение $A_1 x = 0$ имеет единственное нулевое решение.

В самом деле, если x_0 есть решение уравнения $A_1 x = 0$, то оно является также решением уравнения $Ax = 0$, так как, применяя к элементу $Ax_0 + \sum_{i=1}^{k} f_i(x_0)\, y_i = 0$ функционалы X_i, $i = 1, 2, \ldots, k'$, получаем

$$f_i(x_0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{1}$$

т. е. $Ax_0 = 0$. Значит, x_0 можно представить в виде линейной комбинации

$$x_0 = \sum_{i=1} f_i(x_0)\, x_i;$$

учитывая равенства (1) получаем $x_0 = 0$.

Уравнение $\overline{A_1} X = 0$ имеет следующие $-\varkappa$ линейно независимых решений: $X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_{k'}$. Пусть X_0 удовлетворяет уравнению

$$\overline{A_1} X = \overline{A}X + \sum_{i=1}^{k} X(y_i)\, f_i = 0.$$

Применяя функционал $\overline{A_1} X$ к элементам x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, получаем $X_0(y_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Значит, $X_0 = \sum_{i=k+1}^{k'} X_0(y_i)\, X_i$.

Обозначим через L подпространство линейных комбинаций $\sum_{i=1}^{k'} c_i y_i$ и через L_1 — подпространство, где $X_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k'$. Прямая сумма $L + L_1$ равняется всему пространству R ([1]). Значит, всякий элемент x пространства R представим в виде

$$x = v + \sum_{i=1}^{k'} c_i y_i, \quad \text{где } v \in L_1.$$

Любой элемент пространства можно еще представить в виде

$$x = v' + \sum_{i=1}^{k} c'_i x_i;$$

v' принадлежит подпространству L'_1, где $f_i(v) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Заметим, что для каждого $v \in L_1$ существует единственное $v' \in L'_1$ такое, что $Av' = v$. Образ оператора A_1 замкнут, т. е. оператор A_1

нормально разрешим. Действительно, пусть $z \in R$, тогда z можно представить в виде

$$z = v_1 + \sum_{i=1}^{k'} \alpha_i y_i.$$

Покажем, что из условия $X_i(z) = 0$, $i = k+1, \ldots, k'$, следует разрешимость уравнения $A_1 x = z$.

Из условий $X_i(z) = 0$, $i = k+1, \ldots, k'$, следует, что можно z представить в виде:

$$z = v_1 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i.$$

Решением уравнения

$$Ax + \sum_{i=1}^{k} f_i(x) y_i = v_1 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i$$

является элемент

$$x = v_1' + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \quad v_1' \in L_1',$$

где v_1' обладает свойством $Av_1' = v_1$.

Из доказанного получаем, что на образе A_1, который равен $L_1 \dot{+} L_2$ $\left(L_2 \text{ — подпространство линейных комбинаций } \sum_{i=1}^{k} c_i y_i\right)$, существует линейный оператор A_1^{-1}, являющийся левым обратным для A_1. Доопределив A_1^{-1} на все пространство следующим образом: $A_1^{-1} y_i = 0$, $i = k+1, \ldots, k'$, и обозначая $A_1 = D$, $Kx = -\sum_{i=1}^{k} f_i(x) y_i$, получаем:

$$A = D + K,$$

где D — обратимый слева, $\overline{D}X = 0$ имеет $-\varkappa$ решений и K — конечномерный оператор.

Из свойства 3° следует 2°, так как конечномерный оператор вполне непрерывен.

Докажем, что из свойства 2° следует свойство 1°. Оператор $A = D + T$ нормально разрешим, т. е. образ оператора A замкнут. В самом деле, $(D+T)x = (E+T_1)Dx$, где $T_1 = TD^{-1}$. Линейное подпространство Γ, образованное элементами Dx, замкнуто.

Если на Γ рассмотреть оператор $E + T_1$, то его образ также образует линейное подпространство, что доказывается в точности, как если бы считать этот оператор определенным на всем R.

Остается показать, что $\varkappa(D+T) = \varkappa$.

Из левых обратных операторов к D выберем тот, который равен нулю на подпространстве, биортогональном к подпространству решений уравнения $\overline{D}X = 0$; обозначим его через D^{-1}.

Оператор DD^{-1} удовлетворяет теоремам Фредгольма. Значит, $DD^{-1} = B + T$, где B обратимый и T вполне непрерывный (1),

$$(D+T)D^{-1} = B + T_2, \quad \overline{D^{-1}}(\overline{D} + \overline{T}) = \overline{B} + \overline{T}_2. \tag{2}$$

Обозначим число решений уравнения $(D+T)x = 0$ через k_1, тогда сопряженное уравнение имеет $k_1 - \varkappa_1$ решений. Число решений уравнения $\overline{D^{-1}}\,(\overline{D}+\overline{T})\,X=0$ равно $k_1-\varkappa_1$, так как уравнение $\overline{D^{-1}}\,X=0$ имеет единственное нулевое решение.

Уравнение $(D+T)\,D^{-1}x=0$ имеет $-\varkappa+k_1$ решений. Учитывая равенства (2), получаем:

$$k_1-\varkappa_1=-\varkappa+k_1, \quad \text{т. е. } \varkappa_1=\varkappa(D+T)=\varkappa.$$

Свойство 3° влечет за собой свойство 4° и 4° влечет 5°. Первая часть утверждения следует из того, что $\overline{D}$ имеет обратный справа и $\overline{K}$ — конечномерный оператор. Вторая часть утверждения тривиальна.

Свойство 5° влечет за собой свойство 1°. Оператор $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{D^*}}+\overline{\overline{T^*}}$, по доказанному, нормально разрешим, значит, операторы A и $\overline{A}$ также нормально разрешимы ([3]).

Рассмотрим оператор $\overline{A}$ как исходный (по отношению к A (и покажем, что $\varkappa(\overline{A})=-\varkappa$.

Образ оператора D^* есть все пространство R. Уравнение $D^*X=0$ имеет, по условию, $-\varkappa$ решений $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{-\varkappa}$. Пусть $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{-\varkappa}$ — элементы $\overline{R}$ такие, что

$$\Psi_i(Z_j)=\delta_{ij}.$$

Любой элемент $f\in\overline{R}$ можно представить в виде ([1])

$$f=\varphi+\sum_{i=1}^{-\varkappa}c_i Z_i, \quad \text{где } \Psi_i(\varphi)=0,\ i=1,\ 2,\ldots,\ -\varkappa.$$

Подпространство, где $\Psi_i(\varphi)=0$, обозначим через L^*. За оператор D^{*-1} примем оператор, переводящий все $\overline{R}$ в L^*, т. е. $D^{*-1}(\overline{R})=L^*$. Из леммы Никольского (([1]), лемма стр. 152) следует, что уравнение $\overline{D^{*-1}}\ \Psi=0$ имеет точно $-\varkappa$ решений.

Оператор $D^{*-1}(D^*+T^*)$ удовлетворяет теоремам Фредгольма. Обозначая число решений уравнения $\overline{(D^*+T^*)}\,\Psi=0$ через k_1 (оно конечно) и допустив, что $\varkappa(\overline{A})=\varkappa_1$, получаем $k_1+\varkappa_1=k_1-\varkappa$, т. е. $\varkappa_1=\varkappa(\overline{A})=-\varkappa$.

Остается показать, что уравнения

$$Ax=0 \quad \text{и} \quad \overline{\overline{A}}\Psi=0$$

имеют одинаковое число решений. Этим теорема будет полностью доказана.

Пусть уравнение $Ax=0$ имеет r решений $x_1, x_2, \ldots, x_r$ и пусть $f_1, f_2, \ldots, f_r$ — система функционалов, биортогональных к $x_1, x_2, \ldots, x_r$, т. е. $f_i(x_j)=\delta_{ij}$.

Из нормальной разрешимости оператора $\overline{A}$ следует, что его образ $\overline{L_1}$ есть множество функционалов f, для которых $f(x_k)=0$, $k=1, 2, \ldots, r$. Любой функционал $f\in\overline{R}$ можно представить в виде ([1])

$$f=\varphi+\sum_{k=1}^{r}f(x_k)\,f_k.$$

Значит, уравнение $\overline{\overline{A}}\Psi=0$ имеет точно r решений (на основании леммы Никольского).

Поступило
4 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 7, № 3 (1943). [2] С. Г. Михлин, Усп. матем. наук, 3, в. 3 (1948). [3] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, 1937, стр. 266—290.