НОВЫЙ КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Шабловский О.Н.
Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого
246746, Беларусь, г. Гомель, пр. Октября, 48
Тел. +375-(232)-48-04-06; факс +375-(232)-47-91-65
E-mail: shabl@gstu.gomel.by

Плоское двумерное нестационарное течение несжимаемой вязкой жидкости определяется полными уравнениями движений, неразрывности и энергии:

$$\rho\frac{d\upsilon_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k} = 0; \ k = 1,2;$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -\frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \Phi + q_\upsilon; \quad \rho \equiv \mathrm{const};$$

$$\Phi = \tau_{11}\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \tau_{22}\frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2} + \tau_{12}\left(\frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_2}\right).$$

Реологическое уравнение состояния вязкоупругой жидкости Максвелла - Олдройда возьмем в форме записи:

$$\tau_{ij} + \gamma\frac{D\tau_{ij}}{Dt} = 2\mu e_{ij}; \ i,j,k = 1,2;$$

$$\frac{DB_{ij}}{Dt} = \frac{dB_{ij}}{dt} + m[B_{ik}\omega_{kj} - \omega_{ik}B_{kj} - l(B_{ik}e_{kj} + e_{ik}B_{kj})]; \qquad (1)$$

$$2e_{ij} = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}; \quad 2\omega_{ij} = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}.$$

Оператор дифференцирования (1) при $m = 0$ есть субстанциональная производная по времени, $d/dt = \partial/\partial t + \upsilon_k \partial/\partial x_k$; при $m = 1, l = 0$ - конвективная производная Яуманна; при $m = 1$, $l = \pm 1$ - две производные Олдройда. Для описания теплопереноса применяем релаксационную модель максвелловского типа:

$$q_i + \gamma_1\frac{dq_i}{dt} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad i = 1,2.$$

Рассмотрим неизотермическое течение вида:

$$\upsilon_1 = -b(t); \ \upsilon_2 = \upsilon(x,t); \ p = p(x,t); \ \rho \equiv \mathrm{const};$$
$$\tau_{ij}/\rho \equiv \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x,t); \ \tau_{12} = \tau_{21}; \ i,j = 1,2;$$
$$T = T(x,t); \ q_1 = q(x,t); \ q_2 \equiv 0.$$

Данный класс решений для уравнений изотермического движения ньютоновской жидкости был указан в [1] без гидродинамической интерпретации. В работах [2-4] этот подход развивается и обобщается на случай неизотермического течения реологически сложных жидкостей.

Аналитическое построение начинаем с того, что для скорости и вязких напряжений принимаем следующие зависимости:

$$\upsilon = \tau f(h,\tau) + \upsilon_0, \quad \upsilon_0 \equiv \mathrm{const};$$

$$b = b_0 + b_1\tau; \quad b_0, b_1 - \mathrm{const};$$

$$\sigma_{ij} = \tau s_{ij}(h,\tau); \quad \gamma k = 1; \quad \gamma \equiv \mathrm{const};$$

$$h = x + b_0 t; \quad \tau = \exp(-kt).$$

Из двух уравнений движения вычисляем

$$p - p_0(\tau) = \tau\rho\pi; \quad \pi = s_{11} - b_1 z;$$

$$s_{12} = a_1\tau - R(z); \quad \dot{R}(z) = f(z);$$

$$a_1 \equiv \mathrm{const}; \quad z = kh - b_1\tau.$$

Здесь $p_0(\tau)$ - произвольная функция. Нормальные напряжения представляются в форме

$$s_{11} = A_{11}(z) + m(1-l)f[-\tau R + (\tau^2 a_1/2)];$$
$$s_{22} = A_{22}(z) + m(1+l)f[\tau R - (\tau^2 a_1/2)],$$

где $A_{11}(z), A_{22}(z)$ - произвольные функции.

Теплофизические параметры жидкой среды берем в виде

$$\nu = \mu/\rho = \nu_0(T_0 - T)^{\frac{1}{2}}; d\mu/dT < 0;$$

$$\lambda = \lambda^0 + \lambda^1(T_0 - T)^{\frac{1}{2}}; \ c_p = c_p^0 + c_p^1(T_0 - T)^{\frac{1}{2}};$$

$$\nu_0, \lambda^0, \lambda^1, c_p^0, c_p^1, \rho, T_0 - const; T_0 > T(x,t).$$

Температура и тепловой поток определяются зависимостями:

$$T = T_0 - \tau^2\theta(z); \quad q = \tau^2 g(z) + \tau^3 æ(z).$$

Тогда из реологического уравнения состояния, которое служит отысканию касательного напряжения s_{12}, выводим:

$$f\left[\frac{A_3 m}{2} - \frac{\nu_0\theta^{\frac{1}{2}}}{\gamma}\right] = a_1 \equiv \mathrm{const};$$

$$A_3(z) = (1-l)A_{22}(z) - (1+l)A_{11}(z).$$

Если $a_1 \neq 0$, то должно быть $f(z) \neq 0$.

Диссипативная функция дается выражением

$$\Phi = \tau_{12}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \tau^2 k\rho f(z)[a_1\tau - R(z)].$$

Объемный источник энергии рассматриваем как суперпозицию двух источников:

$$q_\upsilon = q_\upsilon^{(1)} + q_\upsilon^{(2)};$$

$$q_\upsilon^{(1)} = \rho k_1(T_0 - T)^n \tau^{2-2n}; q_\upsilon^{(2)} = \rho k_2(T_0 - T)^m \tau^{3-2m};$$

$$k_1, k_2, n, m - \text{const}.$$

Источник энергии $q_\upsilon(T,\tau)$, зависящий явно от времени, естественно назвать реономным; источник $q_\upsilon(T)$, не зависящий явно от времени, – склерономным.

Нетрудно видеть, что линия $z_w = \text{const}$ является образом подвижной непроницаемой стенки (контактной границы):

$$x_w(t) = -b_0 t + \gamma b_1 \exp(-t/\gamma) + \gamma z_w.$$

Скорость перемещения стенки равна продольной (вдоль оси OX) компоненте скорости жидкости:

$$u_w \equiv dx_w/dt = -b_0 - b_1 \exp(-t/\gamma).$$

Положим для определенности $b_0 < 0$. В начальном и в установившемся состояниях скорость стенки равна: $u_w(0) = -b_0 - b_1$; $u_w(t \to \infty) = -b_0 > 0$. Если $(-b_0) > b_1$, то $u_w(0) > 0$, т.е стенка движется только в одном направлении, вправо вдоль OX; жидкость находится слева от стенки, $x \in (-\infty, x_w]$. Если $(-b_0) < b_1$, то скорость $u_w(t)$ изменяет знак: при $t \in [0, t_*]$ стенка движется влево; при $t = t_*$ происходит остановка, $u_w(t_*) = 0$,

$$-t_*/\gamma = \ln(-b_0/b_1) < 0;$$

при $t > t_*$ стенка движется вправо, ее скорость увеличивается, стремясь к предельному значению $(-b_0)$. В этом варианте жидкость также находится слева от стенки, $x \in (-\infty, x_w]$. Таким образом, аргумент z можем считать лагранжевой координатой, являющейся образом частицы жидкости.

Реономные источники энергии релаксируют следующим образом вдоль изотермы $T_i = \text{const}$:

$$q_\upsilon^{(1)} \sim \exp(-t/\gamma^{(1)}); \; \gamma^{(1)} = \frac{\gamma}{2-2n} > 0; \; n < 1;$$

$$q_\upsilon^{(2)} \sim \exp(-t/\gamma^{(2)}); \; \gamma^{(2)} = \frac{\gamma}{3-2m} > 0; \; m < 3/2.$$

Если $n = 1$ и $m = 3/2$, то источники энергии – склерономные. Как в реономном, так и в склерономном случаях вдоль линии частицы жидкости $z_i = \text{const}$ имеем: $q_\upsilon^{(1)} \sim \exp(-2t/\gamma)$; $q_\upsilon^{(2)} \sim \exp(-3t/\gamma)$. Таким образом, источник $q_\upsilon^{(2)}(z_i,\tau)$ релаксирует быстрее, чем $q_\upsilon^{(1)}(z_i,\tau)$.

Система дифференциальных уравнений для функций $\theta(z), R(z)$ выглядит так:

$$R\ddot{R} = \frac{k_1}{k}\theta^n - l_0\ddot{\theta} - 2c_p^0\theta;$$

$$a_1\ddot{R} - l_1\theta^{\frac{1}{2}}\ddot{\theta} - \frac{l_1}{2}\theta^{-\frac{1}{2}}\dot{\theta}^2 + \frac{k_2}{k}\theta^m - 2c_p^1\theta^{\frac{3}{2}} = 0;$$

$$l_0 = \lambda^0/[\rho(\gamma - 2\gamma_1)]; \; l_1 = \lambda^1/[\rho(\gamma - 3\gamma_1)].$$

Подробно рассмотрен случай $a_1 = 0$, когда эти уравнения разделяются.

Гидродинамическая интерпретация данного класса решений позволила изучить: релаксационные связи между трением и полем скоростей, контрградиентный теплоперенос, а также знакопеременный характер диссипативной функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Страхович К.И. Двуразмерное движение вязкой несжимаемой жидкости // Записки Гос. гидрологич. ин-та. 1932. Т.6. С.27-46 (Страхович К.И. Гидро- и газовая динамика. М.: Наука, 1980. С.29-46).
2. Шабловский О.Н. О знакопеременной диссипации энергии в жидкости с релаксирующими вязкими напряжениями // ИФЖ. 1997. Т.70. № 6. С.967 – 974.
3. Шабловский О.Н. Эволюционные свойства разрывных течений жидкости с турбулентной вязкостью // Прикладная гидромеханика. 2001. Т.3(75), № 2. С.72-80.
4. Шабловский О.Н. Динамика вихрей и теплоперенос в потоке вязкой жидкости. Гомель: ГГТУ имени П.О. Сухого, 2001. 142 с.