

Научная статья

УДК 517.958:531.32

doi: 10.17223/19988621/98/14

**Неустойчивые возмущения закрученного течения  
идеальной несжимаемой жидкости в областях  
с открытыми границами**

**Олег Никифорович Шабловский**

*Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого,  
Гомель, Беларусь, shablovsky-on@yandex.ru*

**Аннотация.** Рассмотрены линеаризованные уравнения Эйлера, определяющие закрученное осесимметричное течение идеальной несжимаемой жидкости. Скорость основного течения имеет одну нетривиальную (азимутальную) компоненту, зависящую от радиальной цилиндрической координаты. Построены точные решения, определяющие растущие со временем возмущения скорости и / или давления. Дано аналитическое описание неустойчивых состояний потока жидкости в открытых областях различной геометрической формы, таких как комбинация вихревого цилиндра с непроницаемой поверхностью, непроницаемый цилиндр, зазор между цилиндрами. Открытые участками границ служат проницаемые сферические сегменты, расположенные на торцах цилиндра.

**Ключевые слова:** уравнения Эйлера, задача протекания, открытое течение, вихревая спираль, коаксиальные цилиндры

**Для цитирования:** Шабловский О.Н. Неустойчивые возмущения закрученного течения идеальной несжимаемой жидкости в областях с открытыми границами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 166–181. doi: 10.17223/19988621/98/14

Original article

**Unstable perturbations in a swirling flow of an ideal  
incompressible fluid in the regions with open boundaries**

**Oleg N. Shablovskiy**

*Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel,  
Gomel, Republic of Belarus, shablovsky-on@yandex.ru*

**Abstract.** This paper examines the linearized Euler equations determining the axisymmetric swirling flow of an ideal incompressible fluid. The main flow is characterized by a single nontrivial (azimuthal) velocity component that depends arbitrarily on the radial cylindrical coordinate. Based on a perturbed steady-state solution, explicit expressions for vortex helices and spiral-shaped stream surfaces are obtained. Exact solutions are constructed that incorporate arbitrary functions in their structure and describe perturbations of velocity and/or pressure growing linearly in time. A hydrodynamic interpretation of

these solutions is given in terms of the fluid flow through a given domain. An analytical description is provided for the unstable fluid states in the regions with open boundary segments. Three geometric configurations of such domains are analyzed. The first is the flow outside a vortex cylinder attached to an impermeable surface with a non-monotonic profile in the radial cylindrical coordinate. The second is the flow inside an impermeable cylinder with movable permeable spherical segments at its ends; the boundary conditions on these segments represent a coupling between velocity and pressure perturbations and the velocity of the segment. The third configuration is the flow in a gap between coaxial cylinders with movable permeable segments located at their ends. The effect of the pressure gradient on the spatial structure of the vortex field is studied. The effect of geometric parameters of the open regions on the flow properties is determined.

**Keywords:** Euler equations, flow problem, open flow, vortex spiral, coaxial cylinders

**For citation:** Shablovskiy, O.N. (2025) Unstable perturbations in a swirling flow of an ideal incompressible fluid in the regions with open boundaries. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 98. pp. 166–181. doi: 10.17223/19988621/98/14

## Введение

В данной статье на основе уравнений Эйлера для идеальной жидкости рассматриваются открытые закрученные течения, в которых неустойчивые возмущения скорости и / или давления являются линейными функциями времени. Укажем краткий перечень научных публикаций, относящихся к теме нашего исследования. История вопроса и основные результаты изучения фундаментальных свойств вихревого движения идеальной однородной несжимаемой жидкости изложены в книгах [1–3]. В работах [4–6] проанализированы различные типы неустойчивости и их влияние на поведение решений двумерных и трехмерных уравнений Эйлера. Статья [7] содержит анализ решений уравнений Эйлера со специальной геометрической структурой; в частности, здесь представлены геликоидальные решения. Основные сведения о состоянии экспериментальных исследований свойств закрученных течений (спиралевидные вихревые структуры, радиальный градиент давления) имеются в [8, 9]. Задача протекания нестационарного потока жидкости через область с открытыми участками границ [10–12] занимает важное место в современной математической гидродинамике. Анализ устойчивости открытых невязких течений при различных вариантах постановки начально-краевой задачи представлен в [13–17]. Отметим, что в этих работах придается большое значение геометрическим формам изучаемых областей: каналам и линиям тока на плоскости, зазорам между цилиндрами и сферами и др.

Ясно, что для дальнейшего изучения обсуждаемых задач полезно иметь в явном виде примеры физически содержательных неустойчивых течений, обладающих нетривиальными свойствами.

Предметом данного исследования являются уравнения Эйлера, линеаризованные на точном стационарном решении, представляющем собой произвольную аналитическую зависимость азимутальной скорости от радиальной цилиндрической координаты.

Цель работы – построить точные частные решения линеаризованных уравнений Эйлера и указать неустойчивые закрученные течения в областях, имеющих проникаемые участки границ.

## Исходные уравнения

В сферической системе координат  $(r, \theta, \phi)$  нестационарное осесимметричное ( $\partial/\partial\phi \equiv 0$ ) движение идеальной несжимаемой жидкости определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta &= 0, \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \left( v_\theta^2 + v_\phi^2 \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v_r v_\theta - \frac{v_\phi^2}{r} \operatorname{ctg} \theta &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v_\phi v_r + \frac{v_\phi v_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $r$  – радиальная сферическая координата;  $\theta$  – полярный угол;  $\phi$  – азимутальный угол;  $\mathbf{v}(v_r, v_\theta, v_\phi)$  – вектор скорости жидкости;  $t$  – время;  $\rho$  – плотность;  $p$  – давление. Вектор вихря скорости равен  $\boldsymbol{\omega} = (1/2)\operatorname{rot} \mathbf{v}$ . Связь с цилиндрической системой координат дается формулами  $\zeta = r \sin \theta$  и  $z = r \cos \theta$ , которые определяют радиальную цилиндрическую и осевую координаты.

Эта система уравнений движения имеет точное стационарное решение

$$v_r \equiv 0, \quad v_\theta \equiv 0, \quad v_\phi = H(\zeta), \quad p = \Pi(\zeta), \quad H^2 = (\zeta/\rho) d\Pi/d\zeta, \quad (1)$$

где вращательная скорость  $v_\phi = H(\zeta)$  – произвольная дифференцируемая функция, ограниченная в изучаемой области. В дальнейшем при рассмотрении отдельных течений применяем частные зависимости  $H(\zeta)$ . Например:

1) полубесконечный интервал  $\zeta \in [0, \infty)$ ,  $H(\zeta = 0) = 0$ ,  $H(\zeta \rightarrow \infty) = 0$ ,

$$H = H_1 \zeta \exp(a_1 \zeta); \quad H_1, a_1 - \text{const}; \quad H_1 > 0, a_1 < 0; \quad (2)$$

2) конечный интервал  $\zeta \in [\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}]$ ;  $0 \leq \zeta^{(1)} < \zeta^{(2)} < \infty$ ,  $H(\zeta = 0) = 0$ .

Линеаризацию исходных уравнений выполняем, применяя малые добавки  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $b$  к основному решению (1):

$$v_r = f(r, \theta, t), \quad v_\theta = g(r, \theta, t), \quad v_\phi = H(\zeta) + h(r, \theta, t), \quad p = \Pi(\zeta) + b(r, \theta, t). \quad (3)$$

В результате стандартных преобразований имеем линеаризованную систему уравнений

$$r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial \theta} + 2f + g \operatorname{ctg} \theta = 0, \quad r \frac{\partial f}{\partial t} = 2Hh - \frac{r}{\rho} \frac{\partial b}{\partial r}, \quad (4)$$

$$r \frac{\partial g}{\partial t} = 2Hh \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial b}{\partial \theta}, \quad r \frac{\partial h}{\partial t} + (\zeta \dot{H} + H)(f + g \operatorname{ctg} \theta) = 0. \quad (5)$$

Точка над символом функции означает дифференцирование  $d/d\zeta$ . В последующем изложении считаем, что произвольные функции, содержащиеся в решениях системы (4), (5), являются ограниченными и дифференцируемыми. Далее нам понадобится уравнение

$$\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} S_v = 0, \quad (6)$$

определяющее непротекаемую поверхность  $S_v(r, \theta, t) = 0$ , а также уравнение

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad} S_{\omega} = 0, \quad (7)$$

определяющее вихревую поверхность  $S_{\omega}(r, \theta, t) = 0$ . Термин «винтовое движение» применяем в тех случаях, когда вектор скорости параллелен вектору вихря скорости,  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 0$ .

### Стационарное решение

В (4), (5) полагаем  $\partial/\partial t \equiv 0$ ,  $\zeta \dot{H} + H \neq 0$ . Здесь мы оставляем в стороне случай  $\zeta \dot{H} + H = 0$ . Стационарное возмущенное течение определяется зависимостями (3), в которых

$$f = A(\zeta) \cos \theta, \quad g = -A(\zeta) \sin \theta, \quad v_{\varphi} = H(\zeta) + h(\zeta), \quad 2\rho H h = \zeta \dot{b}(\zeta), \quad \zeta \in [0, \infty), \quad (8)$$

причем  $A(\zeta)$ ,  $b(\zeta)$ ,  $H(\zeta)$  – произвольные функции, которые должны удовлетворять условиям:  $\zeta=0, H=0, h=0; \zeta \rightarrow \infty, A \rightarrow 0, b \rightarrow 0, H \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ . Завихренность течения (8) определяется следующими выражениями:

$$\omega_r = \frac{\cos \theta}{2\zeta} (\zeta \dot{v}_{\varphi} + v_{\varphi}), \quad \omega_{\theta} = \frac{-\sin \theta}{2\zeta} (\zeta \dot{v}_{\varphi} + v_{\varphi}), \quad \omega_{\varphi} = -\dot{A}/2.$$

Значит, в цилиндрических координатах  $v_z = A(\zeta)$ ,  $\omega_z = (\zeta \dot{v}_{\varphi} + v_{\varphi})/(2\zeta)$ , а  $\zeta$  – радиальные компоненты скорости и завихренности нулевые:  $v_{\zeta} \equiv 0$ ,  $\omega_{\zeta} \equiv 0$ . Следовательно,  $\zeta = \text{const} > 0$  – это семейство непротекаемых вихревых цилиндров. Каждый такой цилиндр – прямой и круговой, а  $\zeta$  есть радиус направляющей окружности. На поверхности цилиндра  $\zeta = \zeta_s$  движение является винтовым, если выполнено условие

$$\zeta = \zeta_s, \quad [\zeta A / (\zeta \dot{v}_{\varphi} + v_{\varphi})] = -v_{\varphi}/\dot{A}. \quad (9)$$

Укажем два интересных варианта течения вида (8).

Примем связь

$$v_z(\zeta) \equiv A(\zeta) = A_* v_{\varphi}(\zeta), \quad A_* \equiv \text{const}, \quad (10)$$

в которой  $|A_*|$  в соответствии с процедурой линеаризации есть величина 1-го порядка малости, а в остальном произвольная. Течение (8), (10) содержит непротекаемую спиралевидную поверхность

$$S_v(\zeta, \theta, \varphi) \equiv \Phi(\zeta) + \operatorname{ctg} \theta - A_* \varphi = 0, \quad (11)$$

геометрические свойства которой зависят от выбора произвольной функции  $\Phi(\zeta)$ . Выражение (11) есть результат интегрирования уравнения (6). Именно связь (10) дает возможность записать (11) в конечной форме. Плоскость  $\theta = \pi/2$  будем называть условно плоскостью экватора.

Если  $\Phi(\zeta) = \Phi_1 \zeta$ ,  $\Phi_1 \equiv \text{const}$ ,  $A_* < 0$ , то

$$\zeta_v = (A_* \varphi - \operatorname{ctg} \theta) / \Phi_1. \quad (12)$$

В северной части пространства нужно взять  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,  $\Phi_1 < 0$ ,  $\varphi \geq 0$ ; в южной части пространства  $\theta \in [\pi/2, \pi]$ ,  $\Phi_1 > 0$ ,  $\varphi \leq 0$ . На плоскости экватора имеем спираль Архимеда,  $\zeta_v(\theta = \pi/2) = A_* \varphi / \Phi_1$ .

Если  $\Phi(\zeta) = \Phi_1 \ln(\Phi_2 \zeta)$ ;  $\Phi_1, \Phi_2 - \text{const}$ ;  $A_* < 0$ ,  $\Phi_2 > 0$ , то

$$\zeta_v = (1/\Phi_2) \exp[(A_* \varphi - \operatorname{ctg} \theta) / \Phi_1]. \quad (13)$$

В северной части пространства  $\Phi_1 > 0$ ,  $\varphi \geq 0$ ,  $\zeta_v(\theta = 0, \varphi) \rightarrow 0$ ; в южной части пространства  $\Phi_1 < 0$ ,  $\varphi \leq 0$ ,  $\zeta_v(\theta = \pi, \varphi) \rightarrow 0$ . На плоскости экватора имеем логарифмическую спираль,  $\zeta_v(\theta = \pi/2) = (1/\Phi_2) \exp(A_* \varphi / \Phi_1)$ . Непротекаемую спираль (13) можно поместить внутри непротекаемого вихревого цилиндра  $\zeta = \zeta_v^1 > (1/\Phi_2)$ , а при  $\zeta = \zeta_v^1$  задать, например, постоянное давление жидкости.

Если  $\Phi(\zeta) = \Phi_1 \operatorname{tg}(\Phi_2 \zeta)$ ;  $\Phi_1, \Phi_2 - \text{const}$ ;  $A_* < 0$ ,  $\Phi_2 > 0$ , то

$$\zeta_v = (1/\Phi_2) \operatorname{arctg}[(A_* \varphi - \operatorname{ctg} \theta) / \Phi_1]. \quad (14)$$

В северной части пространства  $\Phi_1 < 0$ ,  $\varphi \geq 0$ ; в южной части пространства  $\Phi_1 > 0$ ,  $\varphi \leq 0$ . На плоскости экватора имеем спираль, которая по мере роста аргумента  $A_* \varphi / \Phi_1 \geq 0$  асимптотически приближается изнутри к окружности радиуса  $\pi/(2\Phi_2)$ . Непротекаемую спираль (14) можно поместить внутри непротекаемого вихревого цилиндра  $\zeta = \zeta_v^1 > [\pi/(2\Phi_2)]$ ,  $p(\zeta = \zeta_v^1) = \text{const}$ .

Итак, течение (8), удовлетворяющее связи  $v_z \leftrightarrow v_\varphi$  (10), содержит в своей структуре спиралевидную поверхность тока (11). Условие винтового движения (9) с учетом (10) выглядит так:

$$\zeta = \zeta_S, \zeta \dot{A} A_* + \zeta \dot{v}_\varphi + v_\varphi = 0. \quad (15)$$

Приведем частный пример винтового движения. Пусть основное течение определяется формулой (2), и при этом  $h = \delta_1 H$ , где  $|\delta_1|$  – малая величина 1-го порядка. Тогда

$$b(\zeta) = \rho \delta_1 H_1^2 [(2a_1 \zeta - 1) \exp(2a_1 \zeta) + 1] / (2a_1^2), \zeta \in [0, \infty). \quad (16)$$

В итоге получаем  $A = A_1 \zeta \exp(a_1 \zeta)$ ,  $A_1 = A_* H_1 (1 + \delta_1)$ ,  $A_*^2 = -(2 + a_1 \zeta_S) / (1 + a_1 \zeta_S) > 0$ , и значение  $(-a_1 \zeta_S)$  должно располагаться в малой левой окрестности 2, а именно:  $a_1 \zeta_S + 2 = O(\delta_1^2)$ . На поверхности цилиндра  $\zeta = \zeta_S$  течение является винтовым.

Теперь в решении (8) примем связь  $\omega_\theta / \omega_\varphi = B_* \sin \theta$ , или, что то же самое,

$$B_* = (\zeta \dot{v}_\varphi + v_\varphi) / (\zeta \dot{A}) \equiv \text{const}, \quad (17)$$

где  $1/|B_*|$  – малая величина 1-го порядка. После интегрирования уравнения (7) получаем спиралевидную вихревую поверхность

$$S_\omega(\zeta, \theta, \varphi) \equiv \Phi_\omega(\zeta) + \operatorname{ctg} \theta + B_* \varphi = 0, \quad (18)$$

где  $\Phi_\omega(\zeta)$  – произвольная функция. Выражения (11) и (18) имеют одинаковую аналитическую форму, поэтому, применяя переобозначения  $\zeta_v \rightarrow \zeta_\omega$ ,  $\Phi \rightarrow \Phi_\omega$ ,  $A_* \rightarrow (-B_*)$ , находим спиралевидные вихревые поверхности  $\zeta = \zeta_\omega$ , геометрические свойства которых аналогичны (12)–(14). Например, вихревую поверхность вида (14) можем поместить внутри непротекаемого вихревого цилиндра  $\zeta = \zeta_\omega^1 > (\pi/2\Phi_2)$ , являющегося изобарической поверхностью. Итак, течение (8), удовлетворяющее связи  $\omega_\theta \leftrightarrow \omega_\varphi$  (17), содержит в своей структуре спиралевидную поверхность (18). Случай, когда в потоке жидкости выполнены сразу две связи (10) и (17), неинтересен. Условие винтового движения (9) с учетом (17) выглядит так:

$$\zeta = \zeta_S, A + B_* v_\varphi = 0. \quad (19)$$

Приведем частный пример винтового движения. Берем по-прежнему (см.: (16)) течение (2) и  $h = \delta_1 H$ . Тогда (17) дает  $A(\zeta) = (1 + \delta_1)(H_1/B_*) (\zeta + a_1^{-1}) \exp(a_1 \zeta)$ , т.е. здесь  $A(\zeta = 0) \neq 0$ ,  $A(\zeta \rightarrow \infty) = 0$ . Течение винтовое на поверхности цилиндра  $\zeta = \zeta_s$ , для которого  $-a_1 \zeta_s = (1 + B_*^2)^{-1} = O(\delta_1^2)$ .

Подведем итог. Для решения (8), (2), (16) верны следующие утверждения. Течение, удовлетворяющее связи  $v_z \leftrightarrow v_\phi$  (10), является винтовым при том значении  $\zeta = \zeta_s$ , которое есть корень уравнения (15), имеющего вид связи  $\omega_0 \leftrightarrow \omega_\phi$  (17). Течение, удовлетворяющее связи  $\omega_0 \leftrightarrow \omega_\phi$ , является винтовым при том значении  $\zeta = \zeta_s$ , которое есть корень уравнения (19), имеющего вид связи  $v_z \leftrightarrow v_\phi$ .

### Растущее возмущение давления

Простые аналитические преобразования позволяют построить следующее точное решение системы уравнений (4), (5):

$$b = (t + t_0) C, \quad h = (t + t_0) \zeta \dot{C} / (2\rho H), \quad t_0 \equiv \text{const} > 0, \quad (20)$$

$$f = -h_1 - g \operatorname{ctg} \theta, \quad h_1 = \zeta r G / (2\rho), \quad \dot{C} = GH(\zeta \dot{H} + H), \quad g = \frac{D}{r} - \frac{\zeta^2 \cos \theta}{2\rho} (4G + \zeta \dot{G}).$$

Произвольные функции  $C(\zeta)$  и  $D(\zeta)$  нужно задавать так, чтобы иметь при  $t=0$  физически содержательное решение, ограниченное во всей области течения. Функция  $G(\zeta)$  применяется для компактности записи. Решение (20) дает равную нулю  $\zeta$ -радиальную компоненту завихренности,  $\omega_\zeta \equiv 0$ , поэтому здесь  $\zeta = \text{const} > 0$  есть семейство вихревых цилиндров.

Приведем пример. Основное течение имеет вид (2). Взяв  $D(\zeta) \equiv 0$ ,  $\dot{C} = C_1 \zeta (2 + a_1 \zeta) \exp(a_2 \zeta)$ ,  $a_2 < 2a_1 < 0$ , получим  $h_1 = (rC_1 / 2\rho H_1^2) \exp(a_{21} \zeta)$ ,  $a_{21} = a_2 - 2a_1$ . Здесь  $C_1$  – постоянная малая величина 1-го порядка. Поведение скорости определяется формулами  $v_\zeta = -h_1 \sin \theta = v_\zeta(\zeta)$ ,

$$h = (t + t_0) \frac{C_1 \zeta}{2\rho H_1} (2 + a_1 \zeta) \exp[(a_2 - a_1) \zeta], \quad v_z = \frac{z C_1}{\rho H_1^2} \left(1 + \frac{\zeta}{2} a_{21}\right) \exp(a_{21} \zeta). \quad (21)$$

Вращательная компонента завихренности выглядит так:

$$\omega_\phi = (-z C_1 a_{21} / 4\rho H_1^2) (3 + a_{21} \zeta) \exp(a_{21} \zeta).$$

Течение жидкости происходит вне вихревого цилиндра  $\zeta = \zeta_\omega$  и ограничено непротекаемыми поверхностями  $z = \pm z_v(\zeta)$ :

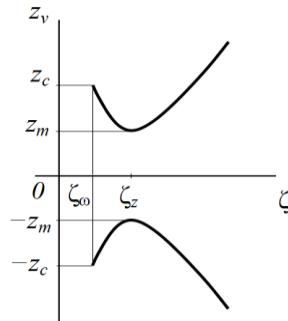
$$z_v = (z_1 / \zeta^2) \exp(-a_{21} \zeta), \quad z_1 = \text{const}. \quad (22)$$

Область течения:  $z \in [-z_v, z_v]$ ,  $\zeta \geq \zeta_\omega > 0$ , и тогда

$$v_z(z = z_v) = \frac{z_1 C_1}{\rho H_1^2 \zeta^2} \left(1 + \frac{\zeta}{2} a_{21}\right). \quad (23)$$

Половина высоты вихревого цилиндра равна  $z_c = z_v(\zeta = \zeta_\omega)$ . Экстремум функции (22) достигается при  $\zeta = \zeta_z = 2/(-a_{21})$ , т.е. именно там, где  $v_z(\zeta = \zeta_z) = 0$ , см. (21) (рис. 1). Вместе с тем имеем  $\omega_\phi(\zeta = \zeta_\phi) = 0$ ,  $\zeta_\phi = 3/(-a_{21})$ ,  $0 < \zeta_z < \zeta_\phi$ ,

т.е. по мере удаления от оси  $z$  сначала меняет знак скорость  $v_z$ , а затем  $\omega_\phi$ . Вихревой цилиндр  $\zeta_\omega = 2/(-a_1)$  определяем из граничного условия  $h(\zeta = \zeta_\omega) = 0$ , см. (21). Возмущение  $h$  и градиент возмущения давления  $\partial b/\partial\zeta$  сохраняют постоянными свои знаки во всей области течения. Если  $3a_1 \geq a_2$ , то  $\zeta_\omega \geq \zeta_z$ . Основной интерес представляет случай, когда нулевая скорость  $v_z(\zeta = \zeta_z) = 0$  присутствует в данном потоке жидкости:  $0 < \zeta_\omega < \zeta_z$ ,  $3a_1 < a_2 < 2a_1$  (см. рис. 1).



**Рис. 1.** Границы области течения (20)–(22):  $\zeta = \zeta_\omega$  – вихревой цилиндр;  
 $z = \pm z_v(\zeta)$  – непроницаемые поверхности;  $z_m = z_v(\zeta_z)$

**Fig. 1.** Boundaries of the flow region (20) – (22):  $\zeta = \zeta_\omega$  is the vortex cylinder;  
 $z = \pm z_v(\zeta)$  are the impermeable surfaces; and  $z_m = z_v(\zeta_z)$

Структура течения зависит от знака константы  $C_1$  и симметрична по отношению к плоскости  $z=0$ , см. (21), (23). При  $C_1 > 0$  вихревой цилиндр  $\zeta = \zeta_\omega$  – это сток конечных размеров, т.е.  $v_z(z=0)=0$ ,  $v_\zeta < 0$  во всей области течения, а для  $\zeta \in [\zeta_\omega, \zeta_z]$  имеем: если  $z > 0$ , то  $v_z > 0$ ; если  $z < 0$ , то  $v_z < 0$ , рис. 2, *a*. При  $C_1 < 0$  вихревой цилиндр  $\zeta = \zeta_\omega$  – это источник конечных размеров, т.е.  $v_z(z=0)=0$ ,  $v_\zeta > 0$  во всей области течения, а для  $\zeta \in [\zeta_\omega, \zeta_z]$  имеем: если  $z > 0$ , то  $v_z < 0$ ; если  $z < 0$ , то  $v_z > 0$ , рис. 2, *b*. На рис. 2 ось  $z$  идет вдоль образующей вихревого цилиндра. Для источника и стока гладкий выступ на непроницаемой границе (22) является причиной изменения направления вектора скорости  $\mathbf{v}(v_\zeta, v_\phi, v_z)$ . Пример течения, содержащего излом непроницаемой границы, дан в [18].

### Растущее возмущение скорости

Система уравнений (4), (5) имеет следующее точное решение:

$$f = \frac{(t+t_0)}{r} f_1(\zeta, z), \quad g = \frac{(t+t_0)}{r} g_1(\zeta), \quad f_1 + g_1 \frac{z}{\zeta} = 0, \quad b = b_0(\zeta) + \rho g_1(\zeta) \frac{z}{\zeta},$$

$$h = \frac{\zeta}{2\rho H} \frac{\partial b}{\partial \zeta}, \quad t_0 \equiv \text{const} > 0, \quad (24)$$

где  $b_0(\zeta)$ ,  $g_1(\zeta)$  – произвольные функции. Формулы (24) определяют неустойчивое начальное ( $t=0$ ) состояние жидкости. Отметим, что в данном случае  $\zeta=\text{const}$  есть

семейство стационарных поверхностей тока;  $z$  – компонента градиента давления равна

$$(1/\rho) \partial p / \partial z = g_1(\zeta)/\zeta, \quad (25)$$

а также выполнено соотношение  $v_r = -v_0 \operatorname{ctg} \theta$ . Радиальная цилиндрическая компонента завихренности не зависит от времени:

$$\omega_\zeta = -\frac{\zeta}{4H} \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{g_1}{\zeta} \right). \quad (26)$$

Цилиндр  $\zeta = \zeta^1$  является вихревой поверхностью, если  $\zeta^1 > 0$  есть корень уравнения  $\dot{g}_1 = (g_1/\zeta)$ .

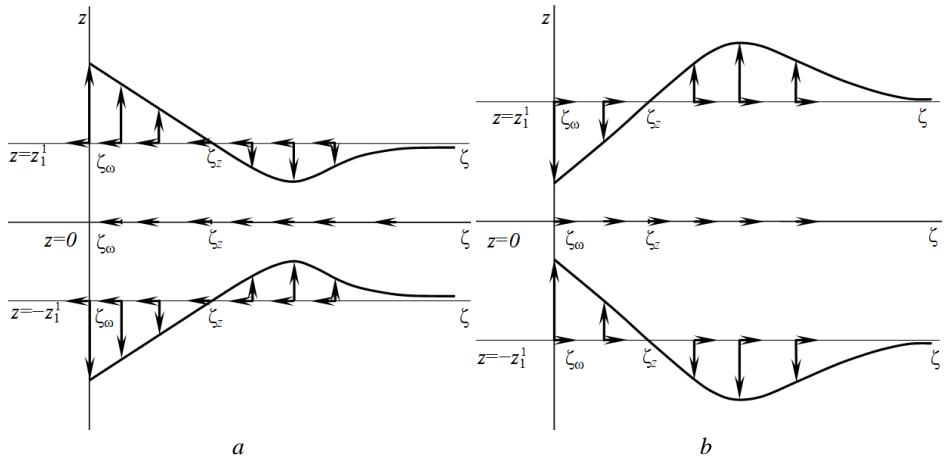


Рис. 2. Схема расположения компонентов  $v_z$  и  $v_\zeta$  вектора скорости течения (20)–(22).

Направления этих компонент отмечены стрелками, параллельными осям  $z$  и  $\zeta$  соответственно:  $a$  – сток;  $b$  – источник;  $z_1^1 \in (0, z_m)$

Fig. 2. Spatial position of the velocity vector components  $v_z$  and  $v_\zeta$  for the flow (20) – (22).

The directions of these components are indicated by arrows parallel to  $z$ - and  $\zeta$ -axes, respectively: (a) discharge; (b) source;  $z_1^1 \in (0, z_m)$

Далее нам понадобятся формулы

$$v_z = (t + t_0) \frac{(-g_1)}{\zeta}, \quad h = \frac{z\zeta}{2H} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{g_1}{\zeta} \right), \quad (27)$$

$$2\omega_z = \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} [\zeta(H + h)], \quad 2\omega_\varphi = (t + t_0) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{g_1}{\zeta} \right),$$

$$2\omega_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(H + h)].$$

В случае (24) интеграл уравнения (7) имеет вид:

$$S_\omega(\zeta, \varphi, t) \equiv \int \frac{H(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta + \frac{\varphi}{2(t + t_0)} + \text{const} = 0. \quad (28)$$

Следовательно, вихревую поверхность можно представить в явной либо неявной форме как  $\zeta = \zeta_{\omega} [\varphi/(t + t_0)]$ , и, независимо от вида основного течения  $H(\zeta) > 0$ , имеем

$$\partial \zeta_{\omega} / \partial \varphi < 0, \quad \partial \zeta_{\omega} / \partial t > 0. \quad (29)$$

Приведем примеры. Рассмотрим течение внутри цилиндрической поверхности тока  $\zeta = \zeta_v$ ,  $0 < \zeta_v < \infty$ :

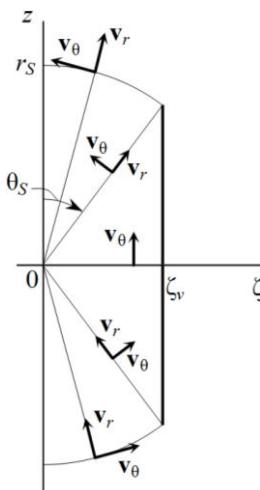
$$H = H_1 \zeta, \quad H_1 \equiv \text{const} > 0, \quad \zeta \in [0, \zeta_v], \quad (30)$$

$$b_0(\zeta) \equiv 0, \quad g_1(\zeta) = g_1^1 \zeta^2 \exp(a_3 \zeta), \quad a_3 < 0,$$

где  $|g_1^1|$  – постоянная малая величина 1-го порядка. Интеграл (28) дает логарифмическую спираль

$$\zeta_{\omega} = \zeta_v \exp \left[ \frac{-\varphi}{2H_1(t + t_0)} \right], \quad \varphi \geq 0, \quad H_1 d\varphi > 0, \quad \zeta_{\omega}(\varphi = 0) = \zeta_v,$$

которая обладает свойствами (29): она обматывается вокруг оси  $\zeta = 0$ , неограниченно приближаясь к ней. В начальном состоянии ( $t=0$ ) наблюдается стремление к расширению вихревой поверхности, находящейся внутри цилиндра  $\zeta = \zeta_v$ . На оси цилиндра жидкость неподвижна. Структура решения (24) позволяет поставить внутри цилиндра  $\zeta = \zeta_v$  проницаемые границы области – подвижные сферические сегменты:  $r = r_S(t) = v_S(t + t_0)$ ,  $0 < \zeta_v < r_S(t = 0)$ ,  $\theta \in [0, \theta_S]$  – северная область, и  $\theta \in [\pi - \theta_S, \pi]$  – южная область, где  $v_S > 0$  – постоянная скорость перемещения поверхности сегмента,  $\sin \theta_S = \zeta_v / r_S$ , рис. 3. Радиальная сферическая скорость протекания через сегменты равна  $v_r(r = r_S) = (-g_1^1 r_S^2 / v_S) \sin \theta \cos \theta \exp(a_3 r_S \sin \theta)$ .



**Рис. 3.** Схема расположения компонентов  $\mathbf{v}_r$  и  $\mathbf{v}_{\theta}$  вектора скорости течения (30)–(32):

$\zeta = \zeta_v$  – непроницаемый цилиндр;  $r = r_S$  – проницаемый сферический сегмент

**Fig. 3.** Spatial position of velocity vector components  $\mathbf{v}_r$  and  $\mathbf{v}_{\theta}$  for the flow (30)–(32):  
 $\zeta = \zeta_v$  is the impermeable cylinder;  $r = r_S$  is the permeable spherical segment

Согласно (24), при  $b_0(\zeta) \equiv 0$  полученное решение удовлетворяет граничному условию

$$r=r_S, b+\rho v_r v_S = 0, \quad (31)$$

которое представляет собой связь между возмущением давления  $b(r=r_S)$  и скоростью протекания  $v_r(r=r_S)$ .

Возьмем для определенности  $g_1^1 < 0$ . Тогда в северной области течения  $v_r(r=r_S) > 0$ , в южной области  $v_r(r=r_S) < 0$ . Ясно, что

$$v_z(r=r_S) = (-r_S/v_S) [g_1(\zeta_S)/\zeta_S], \quad \zeta_S = \zeta_v \sin \theta / \sin \theta_S, \quad \operatorname{sgn} v_z = -\operatorname{sgn} g_1^1.$$

Схема течения показана на рис. 3. Формула

$$\omega_\phi(r=r_S) = \frac{r_S}{2\rho v_S} \left[ \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right]_{r=r_S} \quad (32)$$

дает корреляцию между вращательной компонентой завихренности и  $\zeta$ -радиальной неоднородностью продольного градиента давления. Громоздкая запись  $\theta$ -компоненты завихренности здесь не приводится; отметим только, что для  $\omega_\theta(r=r_S)$  основным элементом аналитической структуры тоже является производная  $(d/d\zeta)(g_1/\zeta)$ , см. (25)–(27).

Итак, для данного течения (30) формирование вихревого поля обусловлено зависимостью  $\partial p / \partial z$  от  $\zeta$ -радиальной координаты. Эта зависимость немонотонная: она имеет минимум при  $\zeta^1 = 1/(-a_3)$ ,  $g_1^1 a_3 > 0$ .

### Течение между двумя коаксиальными цилиндрами

На основе решения (24),  $b_0(\zeta) \equiv 0$  рассмотрим течение жидкости между коаксиальными цилиндрами:

$$\zeta \in [\zeta_i, \zeta_e], \quad 0 < \zeta_i < \zeta_e < r_S(t=0), \quad \sin \theta_1 = \zeta_i/r_S, \quad \sin \theta_2 = \zeta_e/r_S.$$

Внутри цилиндрического зазора перемещаются проницаемые сферические сегменты, из которых вырезана центральная часть, соответствующая внутреннему цилинду и заключающая в себе конечную окрестность оси  $z$ :  $r_S(t) = v_S(t+t_0)$ ,  $v_S > 0$ ,  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$  – северная область, и  $\theta \in [\pi-\theta_2, \pi-\theta_1]$  – южная область, рис. 4. На поверхности  $r=r_S$  выполнено граничное условие (31). Радиальная сферическая скорость протекания жидкости через сегменты зависит от выбора функции  $g_1(\zeta)$ :  $v_r(r=r_S) = (-1/v_S) g_1(\zeta_S) \operatorname{ctg} \theta$ ,  $\zeta_S = r_S \sin \theta$ . Далее нижними индексами  $i, e$  отмечаем параметры течения на внутреннем и внешнем цилиндрах соответственно.

Примем связь между функциями  $H(\zeta)$  и  $g_1(\zeta)$ :

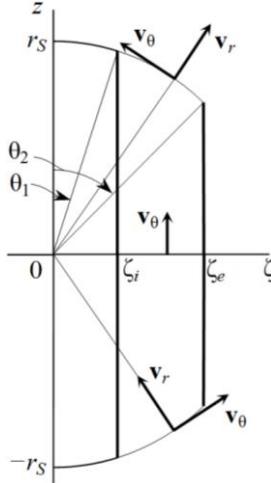
$$\zeta^2 \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{g_1}{\zeta} \right) = \frac{2H^2}{g_*}, \quad (33)$$

где  $1/g_*$  – постоянная малая величина 1-го порядка. Изучим движение, для которого

$$H = H_e \frac{(1+m_*)(\zeta/\zeta_e)}{[1+m_*(\zeta/\zeta_e)]}, \quad h = (H/g_*) \operatorname{ctg} \theta,$$

$$b = 2\rho H_* \zeta h, \quad H_* = H_e (1 + m_*) / \zeta_e, \quad (34)$$

$$g_* = \frac{2\zeta^2 H_*^2 \zeta_i (m_H - 1)}{\zeta_i (m_H - 1) + \zeta \left( 1 - \frac{\zeta_i}{\zeta_e} m_H \right)}, \quad \zeta \in [\zeta_i, \zeta_e], \quad \theta \in [\theta_1, \pi - \theta_1].$$



**Рис. 4.** Геометрические параметры области течения (34) в зазоре между непроницаемыми коаксиальными цилиндрами:  $\zeta = \zeta_i$  и  $\zeta = \zeta_e$  – радиусы внутреннего и внешнего цилиндов;  $r = r_s$  – проницаемый сферический сегмент

**Fig. 4.** Geometric parameters of the flow domain (34) in a gap between impermeable coaxial cylinders:  $\zeta = \zeta_i$  and  $\zeta = \zeta_e$  are the radii of internal and external cylinders, respectively;  $r = r_s$  is the permeable spherical segment

Применяем обозначения:

$$m_H = \frac{H_e}{H_i}, \quad m_\phi = \frac{h_e}{h_i}, \quad 1 + m_* = \frac{(\zeta_e/\zeta_i) - 1}{m_H - 1}.$$

При анализе решения (34) полагаем  $H(\zeta) > 0$  и фиксируем исходные положительные параметры  $\zeta_i$ ,  $\zeta_e$ ,  $H_e$ ,  $m_H$ . Отметим, что  $m_H = (v_z)_e / (v_z)_i$ ,  $v_z(r = r_s) = -2r_s H_* H_S / (g_* v_S)$ ,  $H_S = H(\zeta = \zeta_S)$ ,  $\zeta_S = r_s \sin \theta$ ,  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ . Согласно (6), течению (34) соответствует непротекаемая поверхность

$$S_v \equiv \zeta - \Phi(Y) = 0, \quad Y = 2H_*(t + t_0)\phi + \left[ (1 + g_* \sin 2\theta) / (2 \sin^2 \theta) \right], \quad (35)$$

где  $\Phi(Y)$  – произвольная функция, область значений которой находится внутри интервала  $[\zeta_i, \zeta_e]$ . Например,  $\Phi = \zeta_i + \Phi_1 (\zeta_e - \zeta_i) \sin^2 \Phi_2 Y$  либо  $\Phi = \zeta_i + \Phi_1 (\zeta_e - \zeta_i) \operatorname{th}^2 \Phi_2 Y$ , где  $\Phi_1, \Phi_2 - \text{const}$ ,  $0 < \Phi_1 \leq 1$ . Именно связь (33) позволяет получить в явном виде спираль (35). Из (25), (33) следует, что

$$\operatorname{sgn} g_* = \operatorname{sgn} \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right). \quad (36)$$

Существуют два режима движения (34), зависящие от поведения основного течения, а именно от знака производной  $dH/d\zeta$ . Режим I: если  $m_H > 1$ , то  $m_\varphi > (\zeta_i/\zeta_e)$ ,  $1 + (m_* \zeta / \zeta_e) > 0$ ,  $\operatorname{sgn} g_* = \operatorname{sgn}(\partial p / \partial z) = -\operatorname{sgn} v_z$ . Здесь  $m_* > 0$ , если  $1 < m_H < (\zeta_e/\zeta_i)$ ;  $-1 < m_* < 0$ , если  $m_H > (\zeta_e/\zeta_i) > 1$ ;  $m_* = 0$ , если  $m_H = (\zeta_e/\zeta_i)$ .

Режим II: если  $0 < m_H < 1$ , то  $0 < m_\varphi < (\zeta_i/\zeta_e)$ ,  $1 + (m_* \zeta / \zeta_e) < 0$ ,  $\operatorname{sgn} g_* = -\operatorname{sgn}(\partial p / \partial z) = \operatorname{sgn} v_z$ .

Итак, согласно (36),  $\operatorname{sgn} g_*$  определяет характер  $\zeta$ -радиальной неоднородности продольного градиента давления  $\partial p / \partial z$ . Значение  $m_H = 1$  является пороговым между режимами I и II. Для каждого режима формальное изменение знака константы  $g_*$  влечет за собой формальное изменение направления течения через проницаемые сегменты. Для выяснения физического характера различий между режимами I и II будем сопоставлять течения с одинаковыми  $\operatorname{sgn}(\partial p / \partial z)$ . Возьмем для определенности течения, в которых  $\partial p / \partial z < 0$ . В режиме I эта ситуация наблюдается при  $g_* < 0$ , и здесь  $|\partial p / \partial z|$  растет с ростом  $\zeta$ . В режиме II имеем  $g_* > 0$ , и здесь  $|\partial p / \partial z|$  убывает с ростом  $\zeta$ . Такой же результат справедлив и для  $\partial p / \partial z > 0$ , т.е. после формального изменения направления продольного течения. В качественном отношении поведение направлений векторов  $v_r$  и  $v_\theta$  одинаковое для обоих режимов (см. рис. 4).

Вывод: для данного течения

$$\operatorname{sgn}(m_H - 1) = \operatorname{sgn} \frac{dH}{d\zeta} = \operatorname{sgn} \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right).$$

В экваториальной плоскости  $z$ -компоненту завихренности не зависит от  $g_*$ :

$$h(z=0) = 0, \quad \omega_z(z=0) = H_* \left( 2 + (m_* \zeta / \zeta_e) \right) / \left[ 2 \left( 1 + (m_* \zeta / \zeta_e) \right)^2 \right]. \quad (37)$$

Обозначим  $\Omega_z(\zeta) = (d/d\zeta)[\omega_z(z=0)]$ . Для режима I имеем  $\omega_z(z=0) > 0$ , и здесь существует еще один порог:  $m_* = 0$ . Если  $m_* > 0$ , то  $\Omega_z < 0$ ; если  $m_* \in (-1, 0)$ , то  $\Omega_z > 0$ .

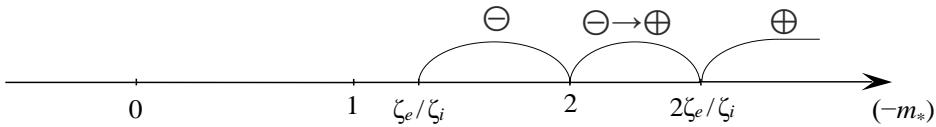
Вывод: для режима I  $\operatorname{sgn}(m_H - (\zeta_e/\zeta_i)) = \operatorname{sgn} \Omega_z$ .

Для режима II завихренность  $\omega_z(z=0)$  как функция аргумента  $\zeta$  может быть знакопеременной и немонотонной. Действительно,  $\omega_z(z=0) < 0$ , если  $(\zeta_e/\zeta_i) < (-m_*) < 2$ , см. (37). Нулевое значение  $\omega_z(z=0) = 0$  получаем при  $\zeta = \zeta_0 = 2\zeta_e/(-m_*)$ , и перемена знака происходит во внутренних точках  $\zeta_0 \in (\zeta_i, \zeta_e)$ , когда

$$2 < (-m_*) < (2\zeta_e/\zeta_i). \quad (38)$$

Кроме того,  $\zeta_0 = \zeta_e$  при  $(-m_*) = 2$ , и тогда  $\omega_z(z=0) < 0$  для  $\zeta \in [\zeta_i, \zeta_e]$ . Если  $(-m_*) = (2\zeta_e/\zeta_i)$ , то  $\zeta_0 = \zeta_i$ , и тогда  $\omega_z(z=0) > 0$  для  $\zeta \in (\zeta_i, \zeta_e]$ . Если  $(-m_*) > (2\zeta_e/\zeta_i)$ , то  $\omega_z(z=0) > 0$  на всем интервале  $\zeta \in [\zeta_i, \zeta_e]$ .

Вывод: по отношению к перемене знака завихренности  $\omega_z(z=0)$  параметр  $(-m_*)$  имеет два пороговых значения,  $(-m_*) = 2$  и  $(-m_*) = 2\zeta_e/\zeta_i$  (рис. 5).



**Рис. 5.** Режим  $m_H \in (0,1)$ . Интервалы значений параметра  $(-m_*)$ , для которых  $\omega_z(z=0)$ , см. (37), отрицательная  $[\ominus]$ , знакопеременная  $[\ominus \rightarrow \oplus]$  и положительная  $[\oplus]$

**Fig. 5.** Flow regime at  $m_H \in (0,1)$ . Intervals with the values of parameter  $(-m_*)$  for which, according to (37),  $\omega_z(z=0)$  is negative  $[\ominus]$ , alternating  $[\ominus \rightarrow \oplus]$ , and positive  $[\oplus]$

Функция  $\Omega_z(\zeta)$  характеризует  $\zeta$ -радиальную неоднородность завихренности  $\omega_z(z=0)$ . Имеем  $\Omega_z < 0$ , если  $(-m_*) > (3\zeta_e/\zeta_i)$ . Нулевое значение  $\Omega_z(\zeta = \zeta_1) = 0$  получаем при  $\zeta = \zeta_1 = 3\zeta_e/(-m_*)$ ; здесь  $\zeta_1 \in (\zeta_i, \zeta_e)$ , если  $3 < (-m_*) < (3\zeta_e/\zeta_i)$ . (39)

Кроме того,  $\zeta_1 = \zeta_e$  при  $(-m_*) = 3$ , и тогда  $\Omega_z > 0$  для  $\zeta \in [\zeta_i, \zeta_e]$ . Если  $(-m_*) = (3\zeta_e/\zeta_i)$ , то  $\zeta_1 = \zeta_i$ , и тогда  $\Omega_z < 0$  для  $\zeta \in [\zeta_i, \zeta_e]$ . Если  $(\zeta_e/\zeta_i) < (-m_*) < 3$ , то  $\Omega_z > 0$  на всем интервале  $\zeta \in [\zeta_i, \zeta_e]$ . Функция  $\Omega_z(\zeta)$  в точке  $\zeta = \zeta_1$  достигает максимум.

Вывод: по отношению к перемене знака  $\Omega_z(\zeta)$ , т.е. по отношению к переходу «монотонность–немонотонность» функции  $\omega_z(z=0)$ , параметр  $(-m_*)$  имеет два пороговых значения:  $(-m_*) = 3$  и  $(-m_*) = 3\zeta_e/\zeta_i$ . Этот результат аналогичен тому, что показан на рис. 5 для  $\omega_z(z=0)$ .

Итак, отношение радиусов цилиндров  $\zeta_e/\zeta_i$  предопределяет свойства течения, потому что именно эта величина указывает границы интервалов значений  $m_*$ , для которых наблюдаются знакопостоянные и знакопеременные, монотонные и немонотонные зависимости  $\omega_z(z=0)$  аргумента  $\zeta$ . Например, условия (38) и (39) совместимы друг с другом, если  $3 < (-m_*) < (2\zeta_e/\zeta_i)$ .

### Заключение

Решение (1) содержит произвольную зависимость  $v_\phi = H(\zeta)$ , поэтому конкретный выбор основного течения дает возможность рассматривать разнообразные варианты поведения возмущенного движения. Для стационарного решения (8) определены закономерности появления спиралевидных вихревых поверхностей. Решение (20) характеризует течение, обусловленное растущим со временем возмущением давления. Гидродинамическая интерпретация: течение жидкости вне вихревого цилиндра, к которому пристыкована непроницаемая поверхность (см. рис. 1). Решение (24) определяет течение, обусловленное растущим со временем возмущением скорости. Гидродинамическая интерпретация:

- 1) течение внутри цилиндрической поверхности тока; на торцах этого цилиндра находятся подвижные проницаемые сферические сегменты см. (рис. 3), и на поверхностях сегментов выполнено условие (31);
- 2) течение в зазоре между коаксиальными цилиндрами (см. рис. 4).

### Список источников

1. Гольдштик М.А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
2. Сэффмен Ф.Дж. Динамика вихрей. М.: Научный мир, 2000. 376 с.
3. Головкин М.А., Головкин В.А., Калявкин В.М. Вопросы вихревой гидромеханики. М.: Физматлит, 2009. 264 с.
4. Дикий Л.А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 108 с.
5. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с.
6. Бардос К., Тити Э.С. Уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости // Успехи математических наук. 2007. Т. 62, вып. 3. С. 5–46. doi: 10.4213/rm6811
7. Данчен Р. Аксиально-симметричные несжимаемые потоки с ограниченным вихрем // Успехи математических наук. 2007. Т. 62, вып. 3. С. 73–94. doi: 10.4213/rm6761
8. Наумов И.В., Окулов В.Л., Соренсен Ж.Н. Диагностирование пространственной структуры вихревых мультиплетов в закрученном течении // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17, № 4. С. 585–593.
9. Ахметов Д.Г., Ахметов Т.Г. Структура течения в вихревой камере // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57, вып. 5. С. 134–143. doi: 10.15372/pmtf20160515
10. Юдович В.И. Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости через заданную область // Математический сборник. 1964. Т. 64, № 4. С. 562–588.
11. Yudovich V.I. Eleven great problems of mathematical hydrodynamics // Moscow Mathematical Journal. 2003. V. 3 (2). P. 711–737. doi: 10.17323/1609-4514-2003-3-2-711-737
12. Коробков М.В., Пилецкас К., Пухначев В.В., Руссо Р. Задача протекания для уравнений Навье-Стокса // Успехи математических наук. 2014. Т. 69, вып. 6. С. 115–176. doi: 10.4213/rm9616
13. Юдович В.И. О неограниченном росте вихря и циркуляции скорости течений стратифицированной и однородной жидкости // Математические заметки. 2000. Т. 68, вып. 4. С. 627–636. doi: 10.4213/mzm983
14. Gallaire F., Chomaz J.-M. The role of boundary conditions in a simple model of incipient vortex breakdown // Physics of Fluids. 2004. V. 16. P. 274–286. doi: 10.1063/1.1630326
15. Rusak Z., Wang S., Xu L., Taylor S. On the global nonlinear stability of a near-critical swirling flow in a long finite-length pipe and the path to vortex breakdown // Journal of Fluid Mechanics. 2012. V. 712. P. 295–326. doi: 10.1017/jfm.2012.420
16. Моргулис А.Б. Вариационные принципы и устойчивость открытых течений идеальной несжимаемой жидкости // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 218–251. doi: 10.17377/semi.2017.14.022
17. Ильин К.И., Моргулис А.Б., Черныш А.С. Операторные интегралы Лапласа и устойчивость открытых течений идеальной несжимаемой жидкости // Владикавказский математический журнал. 2019. Т. 21, № 3. С. 31–49. doi: 10.23671/VNC.2019.3.36460
18. Шабловский О.Н. Разрывное конически симметричное течение идеальной несжимаемой жидкости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 149–163. doi: 10.17223/19988621/88/12

### References

1. Goldshtik M.A. (1981) *Vikhrevye potoki* [Vortex flows]. Novosibirsk: Nauka.
2. Seffmen F.Dzh. (2000) *Dinamika vikhrey* [Vortex dynamics]. Moscow: Nauchnyy mir.
3. Golovkin M.A., Golovkin V.A., Kalyavkin V.M. (2009) *Voprosy vikhrevoy gidromekhaniki* [Questions of vortex hydromechanics]. Moscow: Fizmatlit.

4. Dikiy L.A. (1976) *Gidrodinamicheskaya ustoychivost' i dinamika atmosfery* [Hydrodynamic stability and atmospheric dynamics]. Leningrad: Gidrometeoizdat.
5. Drazin F. (2005) *Vvedenie v teoriyu gidrodinamicheskoy ustoychivosti* [Introduction to the theory of hydrodynamic stability]. Moscow: Fizmatlit.
6. Bardos K., Titi E.S. (2007) Uravneniya Eylera ideal'noy neszhimaemoy zhidkosti [Euler equations for incompressible ideal fluids]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*. 62(3). pp. 5–46. doi: 10.4213/rm6811
7. Danshen R. (2007) Aksial'no-simmetrichnye neszhimaemye potoki s ogranicennym vikhrem [Axisymmetric incompressible flows with bounded vorticity]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*. 62(3). pp. 73–94. doi: 10.4213/rm6761
8. Naumov I.V., Okulov V.L., Sorensen Zh.N. (2010) Diagnostirovaniye prostranstvennoy struktury vikhrevykh mul'ti-pletov v zakruchennom techenii [Diagnosing the spatial structure of vortex multiplets in a swirling current]. *Teplofizika i aeromehanika – Journal of Thermophysics and Aeromechanics*. 17(4). pp. 585–593.
9. Akhmetov D.G., Akhmetov T.G. (2016) Struktura techeniya v vikhrevoy kamere [Flow structure in a vortex chamber]. *Prikladnaya mehanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 57(5). pp. 134–143. doi: 10.1537/pmtf20160515
10. Yudovich V.I. (1964) Dvumernaya nestatsionarnaya zadacha o protekanii ideal'noy neszhimaemoy zhidkosti cherez zadannuyu oblast' [A two-dimensional nonstationary problem of the flow of an ideal incompressible fluid through a given region]. *Matematicheskiy sbornik – Sbornik: Mathematics*. 64(4). pp. 562–588.
11. Yudovich V.I. (2003) Eleven great problems of mathematical hydrodynamics. *Moscow Mathematical Journal*. 3(2). pp. 711–737. doi: 10.17323/1609-4514-2003-3-2-711-737
12. Korobkov M.V., Piletskas K., Pukhnachev V.V., Russo R. (2014) Zadacha protekaniya dlya uravneniya Nav'e-Stoksa [The flux problem for the Navier-Stokes equations]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*. 69(6). pp. 115–176. doi: 10.4213/rm9616
13. Yudovich V.I. (2000) O neogranichennom roste vikhrya i tsirkulyatsii skorosti techeniy stratifitsirovannoy i odno-rodnoy zhidkosti [On the unlimited vortex growth and circulation of the flow velocity of a stratified and homogeneous liquid]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*. 68(4). pp. 627–636. doi: 10.4213/mzm983
14. Gallaire F., Chomaz J.-M. (2004) The role of boundary conditions in a simple model of incipient vortex breakdown. *Physics of Fluids*. 16. pp. 274–286. doi: 10.1063/1.1630326
15. Rusak Z., Wang S., Xu L., Taylor S. (2012) On the global nonlinear stability of a near-critical swirling flow in a long finite-length pipe and the path to vortex breakdown. *Journal of Fluid Mechanics*. 712. pp. 295–326. doi: 10.1017/jfm.2012.420
16. Morgulis A.B. (2017) Variatsionnye printsipy i ustoychivost' otkrytykh techeniy ideal'noy neszhimaemoy zhidkosti [Variational principles and stability of open flows of an ideal incompressible fluid]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya – Siberian Electronic Mathematical Reports*. 14. pp. 218–251. doi: 10.17377/semi.2017.14.022
17. Il'in K.I., Morgulis A.B., Chernysh A.S. (2019) Operatornoye integraly Laplasa i ustoychivost' otkrytykh techeniy ideal'noy neszhimaemoy zhidkosti [Operator-valued Laplace's integrals and stability of the open flows of inviscid incompressible fluid]. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal – Vladikavkaz Mathematical Journal*. 21(3). pp. 31–49. doi: 10.23671/VNC.2019.3.36460
18. Shablovskiy O.N. (2024) Razryvnoe konicheski simmetrichnoe techenie ideal'noy neszhimaemoy zhidkosti [A discontinuous conically symmetric flow of an ideal incompressible fluid]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 149–163. doi: 10.17223/19988621/88/12

***Сведения об авторе:***

**Шабловский Олег Никифорович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механика» Гомельского государственного технического университета им. П.О. Сухого (Гомель, Беларусь). E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

***Information about the author:***

**Shablovskiy Oleg N.** (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Belarus). E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

*Статья поступила в редакцию 30.11.2024; принята к публикации 08.12.2025*

*The article was submitted 30.11.2024; accepted for publication 08.12.2025*