Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Д. ВОЛКОВ

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

(Представлено академиком И. П. Бардиным 28 XI 1950)

1. Выделим в квази-изотропном поликристалле объем W, малый по сравнению с размерами всего поликристалла, но достаточно большой по сравнению с размерами структурных составляющих, и разделим его на множество объемов V, малых по сравнению с размерами структурных составляющих, но достаточно больших по сравнению с постоянными решетки. Принимая объем W за точку, построим из нее систему векторов критических скалывающих напряжений τ_{si} (на площадках скольжения в направлениях скольжения для кристаллов). Будем предполагать, что распределение τ_{si} по абсолютной величине имеет острый максимум. Тогда концы векторов образуют сферу радиусом τ_s [1].

Если распределения тензоров напряжений в объемах V по главным напряжениям и направлениям главных осей также имеют острые максимумы, то с достаточной степенью вероятности скалывающее напряжение на площадке скольжения с нормалью ν (в системе координат, совпадающей с главными направлениями среднего статистического тензора) равно:

$$\tau_\nu = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - [\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2]^2}, \tag{1}$$

где $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$ — главные напряжения среднего статистического тензора; l, m, n — направляющие косинусы нормали.

2. Вследствие закона скалывающих напряжений для монокристаллов [2] и предположений, изложенных выше, поликристалл переходит от упругого состояния к упруго-пластическому в момент касания системы скалывающих напряжений (1) с поверхностью критических скалывающих напряжений, в которую превращается сфера под действием нормальных напряжений.

Измененное критическое скалывающее напряжение:

$$\tau_{s\nu} = \tau_s + \Psi(\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3; \nu). \tag{2}$$

Одно из наиболее простых предположений относительно вида функции (2):

$$\tau_{s\nu} = \tau_s - \mu\sigma_\nu, \tag{3}$$

где σ_ν — нормальное напряжение на площадке ν, μ — коэффициент пропорциональности.

Образуем разность

$$\Delta\tau = \tau_\nu^2 - \tau_{s\nu}^2. \tag{4}$$

Направляющие косинусы нормалей к площадкам, по которым (4) экстремально и $\tau_\nu \neq 0$:

$$1.\quad l = 0,\quad m = \pm\sqrt{\frac{\sigma_2 - \sigma_3 + 2\mu(\tau_s - \mu\sigma_3)}{2(1+\mu^2)(\sigma_2 - \sigma_3)}},$$

$$2.\quad m = 0,\quad n = \pm\sqrt{\frac{\sigma_3 - \sigma_1 + 2\mu(\tau_s - \mu\sigma_1)}{2(1+\mu^2)(\sigma_3 - \sigma_1)}}, \qquad (5)$$

$$3.\quad n = 0,\quad l = \pm\sqrt{\frac{\sigma_1 - \sigma_2 + 2\mu(\tau_s - \mu\sigma_2)}{2(1+\mu^2)(\sigma_1 - \sigma_2)}}.$$

Подставляя (5) в (4), находим условия пластичности:

$$\Delta\tau_1 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 4\mu\tau_s(\sigma_2 + \sigma_3) - 4\mu^2\sigma_2\sigma_3 - 4\tau_s^2}{4(1+\mu^2)} \leqslant 0,$$

$$\Delta\tau_2 = \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 4\mu\tau_s(\sigma_3 + \sigma_1) - 4\mu^2\sigma_3\sigma_1 - 4\tau_s^2}{4(1+\mu^2)} \leqslant 0, \qquad (6)$$

$$\Delta\tau_3 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\mu\tau_s(\sigma_1 + \sigma_2) - 4\mu^2\sigma_1\sigma_2 - 4\tau_s^2}{4(1+\mu^2)} \leqslant 0.$$

3. Для металлов, у которых сопротивление растяжению приблизительно равно сопротивлению сжатия (безуглеродистое железо, медь), полагая $\mu = 0$, из (6) получаем условие максимальных скалывающих напряжений Сен-Венана [3]:

$$T_1 = \left|\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right| \leqslant \tau_s,\quad T_2 = \left|\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right| \leqslant \tau_s,\quad T_3 = \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right| \leqslant \tau_s. \qquad (7)$$

Если μ мало и положительно, то, согласно (5), незначительным отклонением направления $\Delta\tau_2$ от T_2 можно пренебречь и допустить, что касание происходит в направлении T_2 ($m = 0$, $l = n = \pm\sqrt{2}/2$). Тогда из (3) и (7) получим условие пластичности Кулона [3]

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_s - \mu(\sigma_1 + \sigma_3). \qquad (8)$$

Таким образом, (6) можно рассматривать как одно из простейших обобщений условий пластичности Сен-Венана и Кулона.

4. Частные случаи. Одноосное растяжение:

$$\sigma_1 = \sigma_p > 0;\quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0;\quad \Delta\tau_2 = \Delta\tau_3 = \Delta\tau_{\max} = 0;$$

$$\sigma_p = 2\tau_s(-\mu + \sqrt{1+\mu^2}). \qquad (9)$$

Чистый сдвиг:

$$\sigma_1 = \sigma_k > 0;\quad \sigma_2 = 0;\quad \sigma_3 = -\sigma_k < 0;$$

$$\Delta\tau_2 = \Delta\tau_{\max} = 0;\quad \sigma_k = \frac{\tau_s}{\sqrt{1+\mu^2}}. \qquad (10)$$

Одноосное сжатие:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0;\quad \sigma_3 = -\sigma_c < 0;$$

$$\Delta\tau_2 = \Delta\tau_{\max} = 0;\quad \sigma_c = 2\tau_s(\mu + \sqrt{1+\mu^2}). \qquad (11)$$

Сопоставляя (9), (10) и (11), найдем:

$$\sigma_p \leqslant 2\sigma_k \leqslant \sigma_c. \qquad (12)$$

Из экспериментов над пластичными металлами, не подверженными старению, установлена закономерность для пределов текучести [3, 4]:

$$\sigma_p' \leqslant \sigma_c' \leqslant 2\sigma_k'. \qquad (13)$$

Из условия постоянства энергии изменения формы (Губер — Мизес — Генки):

$$\sigma_p = \sigma_c = 0{,}863\,(2\sigma_k) < 2\sigma_k. \tag{14}$$

Соотношение (14) противоречит первому из неравенств (13) и согласуется со вторым, в то время как (12) согласуется с первым и не соответствует второму. Однако это несоответствие не является противоречивым, поскольку (12) относится к границе между упругими и пластическими деформациями, а (13) — к области пластических деформаций металлов, у которых сопротивление растяжению мало отличается от сопротивления сжатию (μ мало и положительно).

Определяя вероятность наличия пластического сдвига в квазиизотропном поликристалле при $\mu = 0$, Н. Н. Афанасьев показал [1], что в области малых пластических деформаций имеет место соотношение $\sigma_p = \sigma_c \leqslant 2\sigma_k$, которое, по существу, не противоречит (14) и хорошо согласуется с экспериментальными данными по выносливости металлов.

5. До настоящего времени не существует единого мнения по вопросу о влиянии остаточных напряжений на выносливость металлов при поверхностном наклепе [4,5]. Используем (6) для выяснения этого вопроса.

Чтобы охватить наиболее распространенные в экспериментальных исследованиях случаи, суммарное напряженное состояние элемента наклепанного поликристалла представим в виде:

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_0; \quad \sigma_2' = \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_0, \tag{15}$$

где σ_0 — остаточные напряжения от наклепа, образующие плоское напряженное состояние в наиболее ответственных слоях поликристалла [4,5].

Если напряжения от внешней нагрузки вызывают пластическую деформацию, достаточную для разрушения от усталости, то до наклепа $\Delta\tau_{\max} = \Delta\tau_2 > 0$.

Оптимальным будем считать такой наклеп, при котором: 1) при подстановке (15) $\Delta\tau_{\max} = \Delta\tau'_{\max} = 0$; 2) предел усталости наклепанного металла достигает максимума.

При $\sigma_1 \geqslant \sigma_0$: $\Delta\tau'_{\max} = \Delta\tau'_2$;

$$\tau_W = \frac{\tau_s + \mu(\sigma_0 - \bar{\sigma})}{\sqrt{1+\mu^2}}, \tag{16}$$

где $\tau_W = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = T_2$, $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$; τ_W — предел усталости наклепанного поликристалла в объеме W. Максимальный предел усталости получим при $\sigma_0 = \sigma_1$:

$$(\tau_W)_{\max} = \tau_c = \frac{1}{2}\sigma_c. \tag{17}$$

Аналогично при $\sigma_1 < \sigma_0$. Так как $\Delta\tau_{\max} = \Delta\tau'_1$, следовательно,

$$\tau_W = \frac{\sigma_c + \sigma_1 - \sigma_0}{2}; \quad (\tau_W)_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_c \quad (\sigma_0 = \sigma_1). \tag{18}$$

Если сопротивления растяжению и сжатию поликристалла одинаковы ($\mu = 0$), то, согласно (16), остаточные напряжения не увеличивают предела усталости. Этот вывод подтверждается экспериментально для безуглеродистого железа (4).

6. Частные случаи оптимального наклепа. Одноосное растяжение: $\sigma_1' = \sigma_W^p - \sigma_0$; $\sigma_2' = 0$; $\sigma_3' = -\sigma_0$. Максимальный предел усталости $(\sigma_W^p)_{\max} = \sigma_c = \sigma_0$.

Одноосное сжатие: $\sigma_1' = -\sigma_0$; $\sigma_2' = 0$; $\sigma_3' = -(\sigma_W^c + \sigma_0)$. Максимальный предел усталости $(\sigma_W^c)_{\max} = \sigma_c$; $\sigma_0 = 0$.

Чистый сдвиг: $\sigma_1' = \sigma_W^k - \sigma_0$; $\sigma_2' = 0$; $\sigma_3' = -(\sigma_W^k + \sigma_0)$. Максимальный предел усталости $(\sigma_W^k)_{\max} = 0{,}5\,\sigma_c = \sigma_0$.

Симметричное одноосное растяжение — сжатие. Из (16) для полуцикла растяжения и из (17) для полуцикла сжатия:

$$\sigma_W^p = 2\frac{\tau_s + \mu\sigma_0}{\mu + \sqrt{1+\mu^2}}; \quad \sigma_W^c = \sigma_c - \sigma_0.$$

Оптимальные условия: $\sigma_W^p = \sigma_W^c$. Следовательно,

$$\sigma_0 = 4\mu\tau_s\frac{\mu + \sqrt{1+\mu^2}}{3\mu + \sqrt{1+\mu^2}}; \quad (\sigma_W)_{\max} = 2\tau_s\frac{1 + 2\mu(\mu + \sqrt{1+\mu^2})}{3\mu + \sqrt{1+\mu^2}}.$$

При неоднородных напряженных состояниях (изгиб, кручение) (16) может служить для построения эпюр пределов усталости по известным эпюрам остаточных напряжений.

7. В заключение отметим, что постоянные μ и τ_s могут быть экспериментально определены, если известны два из трех пределов упругости: σ_p; σ_k; σ_c. Так например, из (9) и (10):

$$4\alpha^2\mu^4 - 4\alpha\mu^3 + 8\alpha^2\mu^2 - 4\alpha\mu + 4\alpha^2 - 1 = 0; \quad \alpha = \frac{\sigma_k}{\sigma_p}.$$

Поскольку $\alpha < 1$ и μ для многих поликристаллов мало, пренебрегаем произведениями со степенями μ выше первой. Тогда, учитывая (10), получим:

$$\mu = \frac{4\alpha^2 - 1}{4\alpha}; \quad \tau_s = \sigma_k\frac{4\alpha^2 + 1}{4\alpha}.$$

В табл. 1 приведены значения μ и τ_s для некоторых сталей, вычисленные по данным Ратнер [4]. Вследствие того, что вместо пределов упругости использованы пределы текучести с малым допуском, величины постоянных, повидимому, несколько преувеличены.

Таблица 1

Материал	Состояние материала	$\sigma^p_{0,05}$ кГ/мм²	$\sigma^k_{0,075}$ кГ/мм²	α	μ	τ_s кГ/мм²
Сталь 30ХСА	Нормализация при 900°	50,6	27,0	0,53	0,06	27,0
Сталь типа хромансиль	Закалка 890°, отпуск 200°	123,3	80,7	0,65	0,26	83,3
Сталь 45	Отжиг 860°	33,4	18,6	0,55	0,09	18,6
То же	Закалка 840°, отпуск 600°	71,0	42,2	0,59	0,17	42,7
„	Закалка 840°, отпуск 400°	122,7	73,7	0,60	0,18	74,9
„	Закалка 840°, отпуск 300°	135,7	87,4	0,65	0,26	90,4

Из данных табл. 1 следует, что μ зависит от состояния металла и увеличивается с увеличением твердости (с понижением температуры отпуска). Согласно (11), (17) и (18) увеличение μ должно сопровождаться увеличением эффективности наклепа. Это заключение подтверждается экспериментально [4].

Свердловский филиал Центральной лаборатории Министерства транспортного машиностроения СССР

Поступило 11 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Афанасьев, ЖТФ, 16, 4, 443 (1946). [2] Е. Шмид и В. Боас, Эластичность кристаллов, в особенности металлических, 1938. [3] Теория пластичности, Сборн. статей под ред. Ю. Н. Работнова, 1948. [4] С. Н. Ратнер, Прочность и пластичность металлов, 1949. [5] И. В. Кудрявцев, М. М. Саверин и А. В. Рябченков, Методы поверхностного упрочнения деталей машин, 1949.