Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

Б. В. ХВЕДЕЛИДЗЕ

О ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ОСОБЫМ ЯДРОМ ТИПА КОШИ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 16 XI 1950)

1. Пусть C обозначает конечную совокупность взаимно не пересекающихся простых разомкнутых дуг, $C=\sum_{k=1}^{m} C_k$. Концы дуг C_k в каком-нибудь порядке обозначим через $c_1, \ldots, c_{2m}$.

В этой заметке мы будем пользоваться некоторыми терминами и определениями, введенными нами в заметке [1]. В частности, дуги C_k будут удовлетворять условию, указанному в упомянутой заметке. Введем следующие обозначения

$$K^0\varphi \equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_C \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}, \quad K^{0\prime}\psi \equiv a(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{b(\tau)\psi(\tau)\,d\tau}{\tau-t},$$

$$k\varphi \equiv \int_C k(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad k'\psi \equiv \int_C k(\tau,t)\psi(\tau)\,d\tau,$$

$$K\varphi \equiv K^0\varphi + k\varphi, \qquad K'\psi \equiv K^{0\prime}\psi + k'\psi,$$

где $a(t)$, $b(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $k(t,\tau)$ — заданные на C функции.

Если функции $a(t)$, $b(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют условию Гельдера (условию H), $a^2(t)-b^2(t)\neq 0$ всюду на C, то все решения уравнения

$$K^0\varphi = f(t) \tag{1}$$

в классе $H^*(C)$ (определение этого класса см. [1,2]) даются формулой [2]:

$$\varphi(t)=K^*f+\alpha(t)\,b^*(t)\,\gamma_{\varkappa-1}(t), \tag{2}$$

где

$$K^*f \equiv a^*(t)f(t)-\frac{\alpha(t)\,b^*(t)}{\pi i}\int_C \frac{f(\tau)\,d\tau}{\alpha(\tau)(\tau-t)}, \quad \alpha(t)=[a(t)+b(t)]\,X^+(t),$$

$$a^*(t)=\frac{a(t)}{a^2(t)-b^2(t)}, \qquad b^*(t)=\frac{b(t)}{a^2(t)-b^2(t)}.$$

Хорошо изучена [2] теория сингулярного уравнения вида

$$K\varphi = f(t), \tag{3}$$

где функция $k(t,\tau)$ удовлетворяет условию H.

Обобщая несколько метод, которым получаются эти результаты, а также опираясь на теоремы заметки ([1]), можно установить более общие результаты.

Начнем со следующей задачи, поставленной Н. И. Мусхелишвили: если заданные функции в уравнении (3) удовлетворяют условию H, а искомая функция непрерывна на каждой закрытой части C, не содержащей концов, и на C интегрируема, то не будет ли такое решение принадлежать классу $H^*(C)$.

Из результатов, приводимых ниже, можно легко вывести, что если заданные функции в уравнении (3) удовлетворяют условию H, то всякое решение этого уравнения, которое непрерывно на каждой закрытой части C, не содержащей концов, а на C принадлежит классу $L^{1+\varepsilon}$, где ε — сколь угодно малое положительное число, принадлежит классу $H^*(C)$. В частности, отсюда вытекает, что такое решение на концах c_k будет иметь вид $\varphi(t) = \varphi^*(t)/(t-c)^\alpha$, где $\varphi^*(t) \in H$ вблизи c_k, а $0 \leqslant \alpha < 1$.

2. Пусть: 1) $a(t)$, $b(t)$ непрерывны, $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ всюду на C и $G(t) = (a(t) - b(t))/(a(t) + b(t)) \in B(C)$ (определение класса $B(C)$ см. ([1])); 2) $f(t) \in L^p(C)$, $(1-\nu)^{-1} < p < 2$, где $0 \leqslant \nu < 2^{-1}$, а ν определяется известным образом с помощью функции $G(t)$ ([1]); 3) $c_k \in T(|f|^p)$ ([1]), $k = 1, \ldots, 2m$.

Рассмотрим при этих предположениях уравнение (1) и найдем все его решения, принадлежащие классу $L^p(C)$, $(1-\nu)^{-1} < p < 2$.

Легко видеть, что всякому такому решению $\varphi(t)$ уравнения (1) формула

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\varphi(t)\, dt}{t - z} \tag{4}$$

приводит в соответствие определенное решение в классе $A_{-1,p}(C)$ задачи линейного сопряжения:

$$\Phi^+(t) = G(t)\, \Phi^-(t) + g(t), \tag{5}$$

где

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}.$$

Обратно, всякому решению в классе $A_{-1,p}(C)$ задачи (5) по формуле

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) \tag{6}$$

соответствует определенное решение в классе $L^p(C)$ уравнения (1). Теперь, воспользовавшись результатами заметки ([1]), заключаем, что если $\varkappa$ — индекс функции $G(t)$ в классе $L^p(C)$ и $\varkappa \geqslant 0$, то все решения уравнения (1) в классе $L^p(C)$ представляются формулой (2). Если же $\varkappa < 0$, то решение в классе $L^p(C)$ существует лишь при соблюдении условий

$$\int\limits_C f(t)\, \alpha^{-1}(t)\, t^k\, dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1, \tag{7}$$

и в этом случае решение дается той же формулой (2), причем $\gamma_{\varkappa-1} \equiv 0$.

Отсюда, в частности, следует, что уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = f(t), \qquad (8)$$

где $f(t) \in L^p(C)$, $1 < p < 2$, а $c_k \in T(|f|^p)$, $k = 1, \ldots, 2m$, имеет решение в классе $L^p(C)$ и эти решения представляются формулой (ср. [2,3])

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i \sqrt{R(t)}}\int_C \frac{\sqrt{R(\tau)}\, f(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \frac{\gamma_{m-1}(t)}{\sqrt{R(t)}},$$

где $R(t) = \prod_{k=1}^{2m}(t - c_k)$.

Аналогично (ср. [2]) можно найти все решения уравнения $K^{0'}\psi = f$ в классе $L^p(C)$.

3. Предположим теперь, что: 1) $a(t)$, $b(t) \in I(C)$, в окрестностях c_k $(k = 1, \ldots, 2m)$ они удовлетворяют условию H и всюду на C $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$; 2) $f(t) \in L^p(C)$, $1 < p < \nu_*^{-1}$ (определение числа ν_* см. [1]) и в окрестностях c_k $(k = 1, \ldots, s;\ s \leqslant 2m)$ $f(t)$ удовлетворяет условию H, где s — число всех неособенных концов, соответствующих функции $G(t) = (a(t) - b(t)) / (a(t) + b(t))$; 3) $c_k \in T(|f|^p)$, $k = s+1, \ldots, 2m$.

Рассмотрим при этих предположениях уравнение (1).

Мы будем говорить, что функция $\varphi(t)$ класса $L^p(C)$ принадлежит классу $L^p(c_1, \ldots, c_r)$, если $\varphi(t)$ непрерывна и ограничена в окрестностях концов c_k $(k = 1, \ldots, r)$.

Можно показать, что всякому решению класса $L^p(c_1, \ldots, c_r)$ уравнения (1) по формуле (4) соответствует определенное решение задачи (5), принадлежащее классу $A_{-1,p}(c_1, \ldots, c_r)$. Обратно, всякому решению задачи (5), принадлежащему классу $A_{-1,p}(c_1, \ldots, c_r)$, по формуле (6) соответствует определенное решение уравнения (1) в классе $L^p(c_1, \ldots, c_r)$. Поэтому, воспользовавшись соответствующим результатом заметки [1], мы заключаем, что все решения уравнения (1), принадлежащие классу $L^p(c_1, \ldots, c_r)$, представляются формулой (2) при $\varkappa \geqslant 0$; если же $\varkappa < 0$, решение существует при соблюдении необходимых и достаточных условий (7) и дается, в таком случае, той же формулой (2), причем $\gamma_{\varkappa-1} \equiv 0$.

Аналогично можно рассмотреть и уравнение $K^{0'}\psi = f$ в классе $L^p(c_1, \ldots, c_r)$ (ср. [2,5]).

4. Рассмотрим, наконец, уравнение (3) и предположим, что функции $a(t)$, $b(t)$, $k(t, \tau)$ удовлетворяют условию H (можно и здесь рассмотреть более общий класс непрерывных функций, чем класс H, но для простоты изложения мы этого делать не будем), $f(t) \in L^p(C)$, $(1-\nu)^{-1} < p < 2$, $c_k \in T(|f|^p)$, $k = 1, \ldots, 2m$.

При этих условиях можно доказать следующие теоремы, аналогичные теоремам Нетера (ср. [2]).

Теорема 1. *Однородное уравнение $K\varphi = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений в классе $L^p(C)$.*

Теорема 2. *Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (3) в классе $L^p(C)$ заключается в том, чтобы*

$$\int_C f(t)\,\psi_j(t)\,dt = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, l',$$

где $\psi_1(t), \ldots, \psi_{l'}(t)$ — *полная система линейно независимых решений однородного уравнения* $K'\psi = 0$ *в классе* $L^q(C)$, $q = p / p - 1$.

Теорема 3. *Если* l *и* l' *обозначают, соответственно, числа линейно независимых решений уравнений* $K\varphi = 0$ *и* $K'\psi = 0$ *в классе* $L^p(C)$ *и, соответственно, в классе* $L^q(C)$ $(q = p / p - 1)$, *то*

$$l - l' = \varkappa,$$

где $\varkappa$ — *индекс функции* $G(t) = (a(t) - b(t)) / (a(t) + b(t))$ *в классе* $L^p(C)$.

Если $f(t) \in L^p(C)$, $1 < p < \nu_*^{-1}$, а в окрестностях неособенных концов c_k $(k = 1, \ldots, s)$ $f(t)$ удовлетворяет условию H и $c_k \in T(|f|^p)$, $k = s+1, \ldots, 2m$, то вышеупомянутые теоремы остаются в силе, если классы $L^p(C)$ и $L^q(C)$ заменить, соответственно, классами $L^p(c_1, \ldots, c_r)$ и $L^p(c_{r+1}, \ldots, c_s)$ (ср. [2,5]).

Наконец, заметим, что все вышеупомянутые обобщения, установленные нами в случае одного сингулярного уравнения вида (3), остаются в силе и для систем сингулярных интегральных уравнений с особым ядром типа Коши, если воспользоваться некоторыми хорошо известными результатами для таких уравнений [6].

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук Груз.ССР

Поступило
25 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Хведелидзе, ДАН, 76, № 2 (1951). [2] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1946. [3] Н. И. Мусхелишвили, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 10 (1941). [4] F. Noether, Math. Ann., 82 (1921). [5] Н. И. Мусхелишвили и Д. А. Квеселава, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 10 (1941). [6] Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, М., 1950.