Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

В. Р. ФРИДЛЕНДЕР

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ КОВАЛЕВСКОЙ — ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 27 XI 1950)

Поставим следующую задачу.

Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы уравнение

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_s^{\alpha_s}} = f(x_1, \dots, x_s)\,L(z) + F(x_1, \dots, x_s;\ y_1, \dots, y_l) \qquad (1)$$

$$(p = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s)$$

допускало единственное решение $z(x, y)$, аналитическое по (вещественным или комплексным) переменным $x_1, x_2, \dots, x_s$ в окрестности точки $x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0$ и удовлетворяющее начальным данным

$$\left.\frac{\partial^k z}{\partial x_i^k}\right|_{x_i=0} = \varphi_{ik}(x, y) \qquad (2)$$

$$(i = 1, 2, \dots, s;\ k = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1).$$

Условия совместности начальных данных

$$\left.\frac{\partial^q \varphi_{ik}}{\partial x_j^q}\right|_{x_j=0} = \left.\frac{\partial^k \varphi_{jq}}{\partial x_i^k}\right|_{x_i=0}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, s;\ i \neq j; \quad k = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1; \quad q = 0, 1, \dots, \alpha_j - 1$$

будем считать выполняющимися тождественно.

Линейный оператор L будем считать независимым от переменных $x_1, x_2, \dots, x_s$ и распространенным на пространство C_l непрерывных функций z переменных $y_1, y_2, \dots, y_l$ в замкнутой области $\mathfrak{M}$.

Искомые условия будем искать в отношении структуры начальных данных (2).

В такой постановке наша задача, обобщая работы Г. С. Салехова [1,2], является как бы обратной классической задаче Коши — Ковалевской — Гурса, в которой начальные данные, равно как и входящие в уравнение функции, считаются заведомо аналитическими и ищется аналитическое решение. Условия Коши — Ковалевской, являясь достаточными (для „нормальных" уравнений), не являются, однако, необходимыми, чем и вызвана постановка сформулированной задачи, включающей в себя, в частности, случай интегро-дифференциальных уравнений.

Для решения поставленной задачи введем следующие определения.

Определение 1. Непрерывную функцию $\psi(y_1, \ldots, y_t)$ будем причислять к классу α, относительно оператора L, если существуют постоянные M и H такие, что при любом целом неотрицательном n справедливо неравенство

$$|L^n(\psi)| \leqslant \frac{M\Gamma(\alpha n+1)}{H^{\alpha n}}\,^{*}, \quad (y_1, \ldots, y_t) \in \mathfrak{M}. \tag{3}$$

Класс α будем обозначать символом J_α.

Указанные классы являются непосредственным обобщением известных классов Жеврея (ср. [3]).

Определение 2. Функцию $\psi(y_1, \ldots, y_t)$ из C_t будем называть L-регулярной, если $L(\psi) \in C_t$ при $(y_1, \ldots, y_t) \in \mathfrak{M}$.

После сделанных определений мы можем доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (1) *функции* f *и* F *аналитичны по* $x_1, x_2, \ldots, x_s$ *в окрестности точки* $x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 0$, *функция* F *принадлежит классу* $\alpha \leqslant p$ *по переменным* $y_1, y_2, \ldots, y_t$ *в области* $\mathfrak{M}$ *и оператор* L *удовлетворяет приведенным выше условиям.*

Тогда для существования единственного решения уравнения (1), *аналитического по* $x_1, x_2, \ldots, x_s$ *в окрестности точки* $x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 0$ *и* L*-регулярного относительно переменных* $y_1, y_2, \ldots, y_s$ *в области* $\mathfrak{M}$, *необходимо и достаточно, чтобы начальные данные были функциями, аналитическими по* $x_1, x_2, \ldots, x_s$ *в окрестности точки* $x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 0$ *и принадлежащими классу* $\alpha \leqslant p$ *в* $\mathfrak{M}$:

$$\varphi_{ik} \in J_{\alpha}, \quad \alpha \leqslant p.$$

При выполнении указанных условий само решение будет функцией класса $\alpha \leqslant p$ *относительно переменных* $y_1, y_2, \ldots, y_t$ *в области* $\mathfrak{M}$.

В случае, когда $\alpha \leqslant p$, *а функции* f, F, φ_{ik} — *целые функции переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_s$, *решение получается также целой функцией от* $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

В том частном случае, когда $F(x, y) \equiv 0$ (однородное уравнение), может быть разобран случай полюса функции $f(x_1, \ldots, x_s)$.

Теорема 2. *Для того чтобы уравнение*

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_s^{\alpha_s}} = \frac{L(x)}{x_1^{r_1} \ldots x_s^{r_s}} \tag{4}$$

($r_1, \ldots, r_s$ *целые неотрицательные*) *допускало единственное решение, аналитическое по* $x_1, x_2, \ldots, x_s$ *в окрестности точки* $x_1 = x_2 = \ldots x_s = 0$, L*-регулярное в* $\mathfrak{M}$ *и удовлетворяющее начальным данным* (2), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1. $L(\varphi_{ik}) = 0$ *при* $i = 1, 2, \ldots, s$; $k = 0, 1, \ldots, r_i - 1$.
2. $\varphi_{ik} \in J_{\alpha}$, $\alpha \leqslant p$.

При выполнении указанных условий будет $z \in J_\alpha$ *в области* $\mathfrak{M}$.

---

* $\Gamma(\alpha n + 1)$ взято вместо $\Gamma(\alpha n)$ исключительно из технических соображений.

Если при этом $\alpha < p$ и φ_{ik} — целые функции переменных $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_s$, то решение будет целой функцией переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

Доказательство этих теорем весьма громоздко и основано на некоторой модернизации методов С. В. Ковалевской и Г. С. Салехова [1,2].

Указанный класс уравнений (1) может быть обобщен с обязательным, однако, условием — разделением переменных. Случай неразделяющихся переменных допускает получение лишь достаточных условий, более сильных, однако, чем условия Коши — Ковалевской.

Поступило
3 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. С. Салехов, ДАН, 59, 5 (1948). [2] Г. С. Салехов, Изв. АН СССР, сер. матем., 14 (1950). [4] M. Jevrey, Ann. Ecole Norm., 35, 3 (1918).