Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

М. М. ПОСТНИКОВ

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУПП ГОМОЛОГИЙ ПРОСТРАНСТВА С ПОМОЩЬЮ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ

*(Представлено академиком И. М. Виноградовым 27 XI 1950)*

В этой заметке решен вопрос, в какой степени и как гомотопические группы топологического пространства определяют его группы сингулярных [2] гомологий. Полученный результат состоит в указании приема, позволяющего вычислить, по крайней мере в принципе, группы гомологий пространства по его гомотопическим группам и некоторым новым инвариантам. В частных случаях, при определенных условиях, наложенных на гомотопические группы, указанный вопрос уже рассматривался многими авторами (см., например [1,3]). Все полученные ими результаты содержатся здесь.

А. $(r, p)^*$-последовательностью мы назовем неубывающую $p+1$-членную последовательность целых неотрицательных чисел, меньших $r+1$. $(r, p)^*$-последовательность, состоящую из различных чисел, назовем $(r, p)$-последовательностью. Любой $(r, q)$-последовательности $\mathfrak{a} = (a_0, \ldots, a_q)$ и любой $(r-q-1, p)^*$-последовательности $\mathfrak{b} = (b_0, \ldots, b_p)$ отнесем $(r, p)^*$-последовательность $\mathfrak{a} \bigcirc \mathfrak{b} = (c_0, \ldots, c_p)$, положив $c_i = b_i + s$, если $a_{s-1} - s + 1 \leqslant b_i < a_s - s$ (условно полагаем $a_{-1} = -1$, $a_{q+1} = r+1$). Для любой $(r, p)$-последовательности $\mathfrak{a}$ обозначим через $\mathfrak{a}^{(i)}$ $(r, p-1)$-последовательность, полученную из $\mathfrak{a}$ вычеркиванием $i$-го члена $(i = 0, \ldots, p)$, а через $\mathfrak{a}^{-1}$ $(r, r-p-1)$-последовательность, содержащую все целые неотрицательные числа, меньшие $r+1$, и не принадлежащие $\mathfrak{a}$. $(r, 0)$-последовательность, содержащую одно число $a$, отождествим с $a$.

Функцию, определенную на множестве всех $(r, p)^*$-последовательностей и принимающую значение из аддитивной абелевой группы $G$, назовем $(r, p)$-*функцией над группой* $G$, если она равна нулю для любой $(r, p)^*$-последовательности, не являющейся $(r, p)$-последовательностью. Любой $(r, p)$-функции над группой $G$ и любой $(r, q)$-последовательности $\mathfrak{a}$ отнесем $(r-q-1, p)$-функцию $\varphi^{(\mathfrak{a})}$, положив $\varphi^{(\mathfrak{a})}(\mathfrak{b}) = \varphi(\mathfrak{a} \bigcirc \mathfrak{b})$ для любой $(r-q-1, p)^*$-последовательности $\mathfrak{b}$.

Б. Пусть $G_1$ — некоторая мультипликативная группа и пусть $K(G_1)$ — ее клеточный комплекс [1]. $r$-мерными клетками (сокращенно $r$-клетками) комплекса $K(G_1)$ являются матрицы $(\alpha_{ab})$ порядка $r+1$, элементы которых принадлежат $G_1$ и удовлетворяют соотношению $\alpha_{ab}\alpha_{bc} = \alpha_{ac}$ $(a, b, c = 0, \ldots, r)$. Грань $A^{(\mathfrak{a})}$ $r$-клетки $A$, где $\mathfrak{a}$ есть $(r, p)$-последовательность, есть $r-p-1$-клетка, получаемая из $A$ вычеркиванием строк и столбцов, номера которых принадлежат $\mathfrak{a}$.

Пусть $\theta_1$ — изоморфное отображение группы $G_1$ на некоторую группу $H_1$. Любой клетке $A = (\alpha_{ab})$ из $K(G_1)$ отнесем клетку $\tilde{\theta}_1 A = (\theta_1^{\alpha} \alpha_{ab})$ из $K(H_1)$.

$(G_1, \sigma)$-комплексом мы назовем клеточный комплекс $K$, если: 1) любой его $r$-клетке $A$ и любой $(r, p)$-последовательности $\mathfrak{a}$ отнесена $r-p-1$-клетка $A^{(\mathfrak{a})}$; 2) задано сохраняющее размерность отображение $\sigma$ комплекса $K$ на комплекс $K(G_1)$, для которого $\sigma(A^{(\mathfrak{a})}) = (\sigma(A))^{(\mathfrak{a})}$, каковы бы ни были клетка $A$ и последовательность $\mathfrak{a}$; 3) граница любой $r$-клетки $A$ выражается формулой

$$\Delta A = \sum_{a=0}^{r} (-1)^a A^{(a)}.$$

Отображением $\mu$ $(G_1, \sigma)$-комплекса $K$ на $(H_1, \tau)$-комплекс $L$ назовем $\theta_1$-изоморфизмом, если: 1) $\mu$ сохраняет размерность и взаимно-однозначно; 2) для любой клетки $A$ из $K$ и любой последовательности $\mathfrak{a}$ $\mu A^{(\mathfrak{a})} = (\mu A)^{(\mathfrak{a})}$; 3) для любой клетки $A$ $\widetilde{\theta}_1 \sigma(A) = \tau(\mu A)$.

Комплекс $K(G_1)$ мы будем считать $(G_1, \sigma)$-комплексом, считая отображение $\sigma$ тождественным. Тогда отображение $\widetilde{\theta}_1$ будет $\theta_1$-изоморфизмом.

В. Пусть группа $G_1$ является группой левых операторов аддитивной абелевой группы $G$. Любой $r$-мерной цепи $c^r$ $(G_1, \sigma)$-комплекса $K$ над группой $G$ отнесем $r+1$-мерную цепь $\nabla_\sigma c^r$ над $G$, положив

$$\nabla_\sigma c^r(A) = \sigma_{01}(A)\, c^r(A^{(0)}) + \sum_{a=1}^{r+1} (-1)^a c^r(A^{(a)})$$

для любой $r+1$-клетки $A$ комплекса $K$, где $\sigma_{ab}(A)$ есть элемент матрицы $\sigma(A)$ с индексами $a, b$. Оказывается, что $\nabla_\sigma \nabla_\sigma c^r = 0$, так что можно развить теорию $\nabla_\sigma$-гомологий, аналогичную обычной.

Пусть $H$ — аддитивная группа с группой операторов $H_1$. Изоморфное отображение $\eta$ группы $G$ на группу $H$ назовем $\theta_1$-изоморфизмом, если

$$\eta(\alpha g) = \theta_1(\alpha)\, \eta(g)$$

для любых $\alpha \in G_1$, $g \in G$.

Пусть $\mu$ есть $\theta_1$-изоморфизм $(G_1, \sigma)$-комплекса $K$ на $(H_1, \tau)$-комплекс $L$ и $\eta$ есть $\theta_1$-изоморфизм группы $G$ на группу $H$. Любой цепи $c^r$ из $L$ над $H$ отнесем цепь $\mu^* c^r$ из $K$ над $G$, положив

$$\mu^* c^r(A) = \eta^{-1} c^r(\mu A)$$

для любой $r$-клетки $A$ из $K$. Легко видеть, что, если $c^r$ есть $\nabla_\tau$-цикл, то $\mu^* c^r$ есть $\nabla_\sigma$-цикл.

Пусть $k$ $(p+1)$-мерный $\nabla_\sigma$-цикл $(G_1, \sigma)$-комплекса $K$. Построим новый $(G_1, \sigma)$-комплекс $K'$, называемый $p$-расширением комплекса $K$ над группой $G$ с фактором $k$, определив $r$-клетку из $K'$ как пару $(A, \varphi)$, состоящую из $r$-клетки $A$ комплекса $K$ и такой $(r, p)$-функции $\varphi$ над группой $G$, что

$$\sigma_{a_0 a_1}(A)\, \varphi(\mathfrak{a}^{(0)}) + \sum_{a=1}^{p+1} (-1)^a \varphi(\mathfrak{a}^{(a)}) + k(A^{(\mathfrak{a}^{-1})}) = 0$$

для любой $(r, p+1)$-последовательности $\mathfrak{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{p+1})$. Кроме того, положим $(A, \varphi)^{(\mathfrak{a})} = (A^{(\mathfrak{a})}, \varphi^{(\mathfrak{a})})$, $\sigma(A, \varphi) = \sigma(A)$. Отождествив клетки $A$ из $K$ размерности $\leqslant p$ с клетками $(A, 0)$ из $K'$, получим $K^{p-1} = K'^{p-1}$ и $K^p \subset K'^p$.

Наряду с $K'$ рассмотрим $p$-расширение $L'$ комплекса $L$ над группой $H$ с некоторым фактором $l$. Предположим, что существует такая $p$-мерная цепь $d^p$ из $K$ над $G$, что

$$\mu^* l - k = \nabla_\sigma d^p.$$

Тогда отображение $\nu$ комплекса $K'$ на комплекс $L'$, относящее $r$-клетке $(A, \varphi)$ из $K'$ $r$-клетку $(\mu A, \psi)$ из $L'$, где $(r, p)$-функция $\psi$ над $H$ определяется формулой

$$\psi(\alpha) = \eta(\varphi(\alpha)) + d^p(A^{(\alpha^{-1})}),$$

является, как легко видеть, $\theta_1$-изоморфизмом комплекса $K'$ на комплекс $L'$, совпадающим на $K^p$ с $\mu$. Изоморфизм $\nu$ мы назовем $\eta$-продолжением изоморфизма $\mu$.

Г. Пусть $G_1, G_2, \ldots$ — бесконечная последовательность групп, где $G_p$ при $p > 1$ есть аддитивная абелева группа, а $G_1$ — мультипликативная группа операторов каждой из групп $G_p$ $(p > 1)$. Комплекс $K(G_1)$ обозначим через $K_1$. Его 2-расширение над группой $G_2$ с некоторым фактором $k_1$ обозначим через $K_2$. Если уже построен комплекс $K_i$, то через $K_{i+1}$ обозначим его $i+1$-расширение над $G_{i+1}$ с некоторым фактором $k_i$. Объединение возрастающей последовательности комплексов $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_i \subset \ldots$ обозначим через $K(\mathfrak{G})$. Здесь символ $\mathfrak{G}$ означает данную последовательность групп $G_i$ вместе с выбранной последовательностью факторов $k_i$. Для такого образования мы примем название системы. Комплексы $K_i$ мы будем обозначать также через $K_i(\mathfrak{G})$. Пусть даны две системы $\mathfrak{G} = \{G_i, k_i\}$ и $\mathfrak{H} = \{H_i, l_i\}$ и пусть для любого $i$ дан изоморфизм $\theta_i$ группы $G_i$ на группу $H_i$. Совокупность $\theta$ изоморфизмов $\theta_i$ назовем изоморфизмом системы $\mathfrak{G}$ на систему $\mathfrak{H}$, если для $i > 1$ изоморфизмы $\theta_i$ есть $\theta_1$-изоморфизмы и если для любого $i$ существует $\theta_1$-изоморфизм $\tilde{\theta}_i$ комплекса $K_i(\mathfrak{G})$ на комплекс $K_i(\mathfrak{H})$, являющийся для $i > 1$ $\theta_i$-продолжением изоморфизма $\tilde{\theta}_{i-1}$. Изоморфизмы $\tilde{\theta}_i$ порождают изоморфизм $\tilde{\theta}$ комплекса $K(\mathfrak{G})$ на комплекс $K(\mathfrak{H})$.

Д. Пусть $X$ — связное (с помощью путей) топологическое пространство. Отнесем ему некоторую систему $\mathfrak{X}$. $i$-й группой системы $\mathfrak{X}$ пусть будет $i$-мерная гомотопическая группа $\pi_*^i$ пространства $X$ в некоторой точке $*$ (о группах $\pi_*^i$ см., например, [4]). Факторы $k_i$ системы $\mathfrak{X}$ мы построим по индукции вместе с соответствующими комплексами $K_i$. Комплекс $K_1$ мы уже имеем. 0-мерный сингулярный симплекс [2] в точке $*$ назовем нормальным. Сингулярный симплекс произвольной размерности назовем 0-нормальным, если все его 0-мерные грани нормальны. Как показано в [1], каждому 0-нормальному $r$-мерному сингулярному симплексу $T^r$ естественным образом соответствует некоторая $r$-клетка из $K_1$, которую мы обозначим через $\omega_1(T^r)$. Пусть уже построен комплекс $K_i$ и определено понятие $i-1$-нормального сингулярного симплекса. Пусть каждому $i-1$-нормальному сингулярному симплексу $T^r$ соответствует некоторая $r$-клетка $\omega_i(T^r)$ из $K_i$. Для любой $i$-мерной клетки $A$ из $K_i$ выберем $i-1$-нормальный сингулярный симплекс $T^i$, для которого $\omega_i(T^i) = A$, и назовем его нормальным $i$-мерным сингулярным симплексом, соответствующим данной клетке. $i-1$-нормальный сингулярный симплекс произвольной размерности назовем $i$-нормальным, если все его $i$-мерные грани нормальны. Для любой $i+1$-мерной клетки $A$ из $K_i$ выберем $i+1$-мерный $i$-нормальный сингулярный симплекс $T^{i+1}$, для которого $\omega_i(T^{i+1}) = A$, и назовем его стандартным $i+1$-мерным сингулярным симплексом, соответствующим клетке $A$. Пусть граница $i+2$-мерного евклидова упорядоченного симплекса $S^{i+1}$ отображена в $X$ так, что отображение $a$-й грани определяет $i+1$-мерный стандартный сингулярный симплекс, соответствующий $a$-й грани $A^{(a)}$ некоторой $i+2$-клетки $A$ из $K_i$. Примем за полюс границы симплекса $S^{i+2}$ нулевую вершину. Тогда указанное отображение определит некоторый элемент $k_i(A)$ группы $\pi_*^{i+1}$. Оказывается, что $k_i$ является $\nabla_\sigma$-циклом. Комплекс $K_{i+1}$ определим как расширение комплекса $K_i$ над группой $\pi_*^{i+1}$ с фактором $k_i$. Пусть $T$ — $r$-мерный $i$-нормальный сингулярный симплекс. Любая $(r, i+1)$-последовательность $\alpha$ определяет $i+1$-мерную грань $T^{(\alpha)}$ симплекса $T$, натянутую на вершины, номера которых принадлежат $\alpha$. Пусть $T_\alpha$ — стандартный сингулярный $i+1$-мерный симплекс, для которого $\omega_i(T_\alpha) = \omega_i(T^{(\alpha)})$. Отличие симплекса $T_\alpha$ от симплекса $T^{(\alpha)}$ оценивается некоторым элементом $\varphi(\alpha)$ группы $\pi_*^{i+1}$. Оказывается, что пара $(\omega_i(T^r), \varphi)$, где $\varphi$ — только что построенная $(r, i+1)$-функция над группой $\pi_*^{i+1}$, является $r$-клеткой из $K_{i+1}$. Положим $\omega_{i+1}(T^r) = (\omega_i(T^r), \varphi)$.

Продолжая построение, мы, во-первых, получим искомую последовательность $k_1, k_2, \ldots$ факторов системы $\mathfrak{X}$, а во-вторых, для любой размерности определим понятие нормального сингулярного симплекса. Нормальные симплексы образуют подкомплекс $N(X)$ полного сингулярного комплекса $S(X)$ пространства $X$, изоморфный комплексу $K(\mathfrak{X})$. С другой стороны, оказывается, что естественное вложение комплекса $N(X)$ в комплекс $S(X)$ является эквивалентностью ([2]). Отсюда следует теорема:

Теорема. *Комплексы $K(\mathfrak{X})$ и $S(X)$ эквивалентны.*

Следствие. Для любой группы $G_1$ обычные группы гомологий комплекса $K(\mathfrak{X})$ над $G$ и группы гомологий пространства $X$ над $G$ изоморфны.

Замечание. При соответствующем определении групп гомологий комплекса $K(\mathfrak{X})$ с локальными коэффициентами высказанное утверждение имеет место и для групп гомологий с локальными коэффициентами.

Е. Построенную выше систему $\mathfrak{X}$ назовем натуральной системой пространства $X$. В ее построении содержится значительный произвол, так что натуральных систем у данного пространства может быть много. Однако все натуральные системы данного пространства изоморфны.

Поступило
5 XI 1950

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Eilenberg and S. McLane, Ann. of Math., **46**, 3, 480 (1945). [2] S. Eilenberg, ibid., **45**, 3, 407 (1944). [3] S. Eilenberg and S. McLane, Proc. Nat. Ac. Sci. USA, **32**, 11, 227 (1947). [4] В. А. Рохлин, Усп. матем. наук, нов. сер., в. 5—6 (15—16), 175 (1946).