Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

П. В. НИКОЛАЕВ

О ПОРЯДКЕ БАЗИСНЫХ КРИВЫХ НОМОГРАММЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 XI 1950)

В данной работе устанавливается связь между порядком базиса какой-либо переменной t_i в номограмме алгебраического M-уравнения $F(t_1, t_2, t_3) = 0$ [1] и размерностью по t_i этого уравнения в том случае, когда данное уравнение допускает A-множитель, содержащий эту переменную t_i.

Такого рода связь известна в номографии лишь для простейших случаев: уравнений третьего и четвертого номографических порядков [2].

Под размерностью r_i по t_i и типом $[r_1, r_2; r_3]$ данного уравнения $F(t_1, t_2, t_3) = 0$ мы будем понимать, соответственно, размерность по t_i и тип функции $F(t_1, t_2, t_3)$ [3].

Известно, что M-полином $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ (приведенный) может быть рассматриваем как результант по τ_i системы полиномов

$$\varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3), \tag{1}$$

$$\varphi_i(t_i, \tau_i) \equiv \varphi_{i1}(t_i) - \tau_i \varphi_{i2}(t_i) \quad (i = 1, 2, 3), \tag{2}$$

где $\varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ есть бирациональный (т. е. нормальный) M-полином [1].

Если теперь $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ есть M-полином, отвечающий данному уравнению $F(t_1, t_2, t_3) = 0$:

$$\Phi(t_1, t_2, t_3) \equiv \psi_1(t_2, t_3)\, \psi_2(t_3, t_1)\, \psi_3(t_1, t_2)\, F(t_1, t_2, t_3) \tag{3}$$

и

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv \sum_{k=1}^{r_i} f_{ik} F_{ik} \tag{4}$$

есть какое-либо базисное по t_i [3] разложение полинома $F(t_1, t_2, t_3)$, то можно показать, что бирациональный параметр

$$\tau_i = \frac{\varphi_{i1}(t_i)}{\varphi_{i2}(t_i)} \tag{2'}$$

является примитивным элементом поля, заданного рациональными функциями

$$\frac{f_{ik}(t_i)}{f_{ir_1}(t_i)} \quad (k = 1, \ldots, r_1) \tag{5}$$

разложения (4). Отсюда будет следовать, что полином $F(t_1, t_2, t_3)$ данного M-уравнения является результантом по τ_i полинома $f(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$

некоторого бирационального (т. е. нормального) M-уравнения и полиномов (2). При этом тип уравнения $f(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ будет таков же, как и тип исходного M-уравнения. Сверх того можно считать, при надлежащем выборе примитивных элементов τ_1, τ_2, τ_3, что шкалы каждой пары переменных τ_i, имеющих общий базис, будут тождественны ([4]).

Вопрос о порядке базисов номограммы M-уравнения решается следующими двумя теоремами.

Теорема 1. *Размерность по t_1 (и по t_2) M-уравнения $F(t_1, t_2, t_3) = 0$, допускающего A-множитель $\psi_3(t_1, t_2)$, равна порядку общего базиса переменных t_1 и t_2.*

Не уменьшая общности, можно считать, что $\psi_3(t_1, t_2) = t_1 - t_2$, а уравнение, следовательно, бирационально относительно t_1 и t_2; обозначим через r и n, соответственно, размерность и степень этого уравнения для тех же переменных ([4]). Очевидно, что $r \leqslant n+1$, а порядок базиса C (общего для t_1 и t_2) равен $n+1$, так как такова же степень бирационального полинома $\Phi(t_1, t_2, t_3) \equiv (t_1 - t_2) F(t_1, t_2, t_3)$ относительно этих переменных ([1]).

Теорема будет доказана, если найдем, что r не может быть менее $n+1$, а для этого достаточно показать, что в семействе функций $F(t_1, \alpha, \beta)$, где α и β — параметры, существует система из $n+1$ линейно независимых функций ([3]).

С этой целью рассмотрим общевзятую прямую p плоскости номограммы данного уравнения, засекающую кривую C в $n+1$ различных точках с пометками $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$, и пусть $t_3 = \beta$ — одна из точек пересечения p с базисом переменной t_3.

Система функций $F(t_1, \alpha_i, \beta)$ семейства $F(t_1, \alpha, \beta)$, где, очевидно,

$$F(t_1, \alpha_i, \beta) \equiv k_i (t_1 - \alpha_1) \ldots (t_1 - \alpha_{i-1})(t_1 - \alpha_{i+1}) \ldots (t_1 - \alpha_{n+1})$$
$$(k_i = \text{const}), \tag{6}$$

будет линейно независимой. В самом деле, тождество

$$\sum_{i=1}^{n+1} c_i F(t_1, \alpha_i, \beta) \equiv 0 \tag{7}$$

возможно лишь при том условии, что все постоянные c_i равны нулю; в этом можно убедиться, полагая $t_1 = \alpha_k$, тогда все полиномы $F(t_1, \alpha_i, \beta)$, как это следует из (6), при $i \neq k$ обратятся в нули, а $F(\alpha_k, \alpha_k, \beta) \neq 0$, и поэтому тождество (7) дает $c_k = 0$. Полагая в этих рассуждениях последовательно $k = 1, \ldots, n+1$, найдем, что функции $F(t_1, \alpha_i, \beta)$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ линейно независимы, и теорема доказана.

Совершенно аналогично может быть доказана теорема 2.

Теорема 2. *Размерность по каждой из переменных уравнения $F(t_1, t_2, t_3) = 0$, допускающего A-множитель $\psi_1(t_2, t_3), \psi_2(t_3, t_1)\psi_3(t_1, t_2)$, на единицу менее порядка, общего для всех этих переменных базиса.*

Из этих теорем, в частности, следует, что в номограммах уравнений типа [2; 3; 3] и [3; 3; 3] (уравнений, соответственно, 5-го и 6-го номографических порядков) общим базисом переменных t_2 и t_3 может быть лишь кривая 3-го порядка, а для уравнения типа [3; 3; 3] общим базисом всех переменных — лишь кривая 4-го порядка.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова

Поступило
26 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. В. Николаев, Уч. зап. МГУ, в. 73, кн. 5 (1940). [2] Н. А. Глаголев. Теоретические основы номографии, 2-е изд., 1936. [3] П. В. Николаев, ДАН, **67**, № 3 (1949). [4] П. В. Николаев, Матем. сборн., **17** (59), № 2 (1944).