Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

Д. МИЛЬМАН

К ТЕОРИИ КОЛЕЦ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 XI 1950)

В этой статье даны некоторые новые применения теорем об экстремальных точках [2,3].

Мы здесь будем пользоваться результатами и терминологией статьи „Кольца с инволюцией" М. А. Наймарка [1].

Определение 1. Алгебраическое кольцо с инволюцией R назовем c-приведенным, если из того, что все положительные функционалы кольца R равны нулю на данном элементе $x \in R$, всегда вытекает, что элемент x равен нулю θ кольца R.

Очевидно, что c-приведенное кольцо всегда является приведенным.

Примечание. Приведенное симметрическое кольцо является c-приведенным.

Это примечание доказывается легко на основании леммы 1 (стр. 114) и теоремы 2 (стр. 119) статьи [1].

В дальнейшем R будет обозначать c-приведенное алгебраическое кольцо с инволюцией, допускающее регулярную норму. H будет обозначать совокупность всех эрмитовых элементов кольца R. Через K обозначим совокупность всех положительных функционалов кольца R, равных 1 на единице e кольца R*.

При регулярной норме H является вещественным нормированным пространством и точки K могут рассматриваться как линейные (ограниченные) функционалы в H. Поэтому множество K может рассматриваться как часть пространства Банаха H^*, сопряженного к пространству H; множество K, будучи регулярно выпуклым и ограниченным по норме, является выпуклым бикомпактом в слабой топологии пространства H^* [4].

Обозначим через S совокупность всех линейных циклических представлений кольца R. Если $L \in S$, то ξ_L будет обозначать нормированный циклический вектор представления L. Оператор, отвечающий элементу $x \in R$ в представлении $L \in S$, обозначим A_x^L.

В статье [1] показывается, что совокупность функционалов пространства H вида $f_L(x) = (A_x^L \xi_L, \xi_L)$, $L \in S$, $x \in H$, совпадает с множеством точек K; при этом, если $L_i \in S$ $(i = 1, 2)$, то $f_{L_1} = f_{L_2}$ лишь в случае эквивалентности представлений L_1 и L_2. Кроме того, в указанном здесь соответствии представлений $L \in S$ и точек K экстремальные точки K и неприводимые представления друг другу отвечают.

---

* Напоминаем, что, согласно терминологии статьи [1], линейный функционал $f(x)$ называется положительным в R, если число $f(x^*x)$ неотрицательно при любом элементе x кольца R.

Если $L_0 \in S$, $\mathfrak{G}_{L_0}$ обозначает гильбертово пространство представления L_0, $\xi \in \mathfrak{G}_{L_0}$ и $\|\xi\| = 1$, то функционал $\varphi(x) = (A_x^{L_0}\xi, \xi)$ $(x \in H)$ является точкой K и выполняется

$$\inf_{L \in S}(A_x^L\xi_L, \xi_L) = \inf_{f \in K} f(x) \leqslant (A_x^L\xi, \xi) \leqslant \sup_{f \in K} f(x) = \sup_{L \in S}(A_x^L\xi_L, \xi_L).$$

Числа $\sup\limits_{L \in S}(A_x^L\xi_L, \xi_L)$, $\inf\limits_{L \in S}(A_x^L\xi_L, \xi_L)$ мы назовем правым и левым краем спектра элемента x, если $x \in H$.

Определение 2. Мы скажем, что эрмитовый элемент x_1 кольца R $(x_1 \neq \lambda e, -\infty < \lambda < \infty)$ точно реализуется представлением $L \in S$ на крае спектра, если циклический вектор ξ_L является собственным вектором оператора $A_{x_1}^L$ при характеристическом числе c, где c обозначает одно из двух чисел края спектра элемента x_1.

Заметим, что элемент $x \in H$ является непрерывной функцией на бикомпакте K. Отсюда вытекает, что числа $\min\limits_{f \in K} f(x)$ и $\max\limits_{f \in K} f(x)$ являются краями спектра элемента $x \in H$.

Равенство $\max\limits_{f \in K}|f(x_1 - \lambda e)| = 0$ влечет $x_1 = \lambda e$, ибо кольцо R, по условию, является c-приведенным. Следовательно, если $x_1 \neq \lambda e$ и только в этом случае $\min\limits_{f \in K} f(x_1) < \max\limits_{f \in K} f(x_1)$ $(x_1 \in H)$.

Если $x_1 \in H$ и $\min\limits_{f \in K} f(x_1) < \max\limits_{f \in K} f(x_1)$, то совокупность K_{x_1} всех точек $\varphi \in K$, принимающих на x_1 фиксированное значение, равное одному из краев спектра x_1, мы будем называть гранью K (K_{x_1} есть одна из двух граней, отвечающих элементу x_1).

Таким образом, если $x_1 \in H$ и $x_1 \neq \lambda e$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, то элементу x_1 отвечают две грани K_{x_1}.

Лемма. *Если $x_1 \in H$, $x_1 \neq \lambda e$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ и $\varphi_0(x)$ есть функционал, являющийся точкой грани K_{x_1}, то положительному функционалу $\varphi_0(x)$ отвечает представление $L_0 \in S$, точно реализующее эрмитовый элемент x_1 на крае спектра, и наоборот.*

Если число c есть край спектра элемента x_1, на котором представление $L_0 \in S$ точно реализует элемент x_1, то L_0 является частью некоторого представления $L_1 \in S$, в котором оператор $A_{x_1 - ce}^{L_1}$ (отвечающий элементу $x_1 - ce$) не является нулевым.

Определение 3. Множество N эрмитовых элементов кольца R назовем совместным на крае спектра, если одно и то же циклическое представление точно реализует все элементы множества N на крае спектра; если при этом N не является правильной частью другого множества, совместного на крае спектра (вообще говоря, при другом циклическом представлении), то мы назовем множество N максимально совместным (на крае спектра).

В статье [2] введено понятие опорного (и максимально опорного) пучка элементов в точке φ_0 регулярно-выпуклого и ограниченного множества K. Мы здесь несколько изменим это определение, а именно: будем считать, что опорный пучок в точке φ_0 состоит из всех тех элементов $x \in H$, для которых по крайней мере одна из двух граней K_x содержит точку φ_0. Применительно к рассматриваемому нами пространству H максимально-опорные пучки в точках K и множества элементов H, максимально-совместные на крае спектра, друг другу соответствуют; в этом легко убедиться на основании доказанной леммы.

Два представления, точно реализующие одну и ту же максимальную совокупность M на крае спектра, назовем однотипными, если каждый элемент $x \in M$ точно реализуется обоими представлениями на одноименном (правом, левом) крае спектра. При этом совокупность всех циклических представлений кольца R, точно реализующих M на крае спектра, разбивается на классы однотипных представлений.

В соответствии между S и K классы однотипных представлений и экстремальные грани K статьи (2) отвечают друг другу.

Из результатов статьи (2) легко вытекают следующие теоремы*.

Теорема 1. *Каждая совокупность эрмитовых элементов кольца R, совместная на крае спектра, содержится в максимальной совместной совокупности. Каждая максимальная совместная совокупность точно реализуется по крайней мере одним неприводимым представлением кольца R.*

Теорема 2. *Для любой максимально-совместной совокупности в H и из каждого класса однотипных циклических представлений кольца R, реализующих эту совокупность, мы выделим по одному представлению „представителю".*

*Совокупность C таких представителей является полной совокупностью представителей кольца R; в частности, можно считать, что C состоит из неприводимых представлений**.*

Теорема 3. *Пусть C обозначает совокупность предыдущей теоремы и L — циклическое представление кольца R. Для всякого элемента $x_0 \in R$, вектора $\xi^0 \in \mathfrak{G}_L$ и числа $\varepsilon > 0$ можно указать представления $\{L_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ из совокупности C и векторы ξ_j^0 в пространствах $\mathfrak{G}_{L_j}$ представлений L_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, чтобы выполнялось:*

$$\left| (A_{x_0}^L \xi^0, \xi^0) - \sum_{j=1}^{n} (A_{x_0}^{L_j} \xi_j^0 \xi_j) \right| < \varepsilon, \quad \sum_{j=1}^{n} \| \xi_j^0 \|^2 = \| \xi^0 \|^2.$$

Нетрудно также убедиться в следующем:

Теорема 4. *Если кольцо R не является коммутативным, то имеется такое максимально-совместное множество M элементов H, что линейная оболочка единицы кольца и множества M является правильной частью в R.*

Определение 4. Эрмитовый элемент x_0 кольца R $(x_0 \neq \lambda e, -\infty < \lambda < \infty)$ назовем хорошо представимым, если для одного из двух краев спектра x_0 имеется одно единственное (с точностью до эквивалентности) циклическое представление, которое точно реализует элемент x_0 на этом крае спектра; это представление назовем достижимым.

Точку φ_0 выпуклого бикомпакта K мы назовем H-достижимой, если некоторый элемент $x_0 \in H$ достигает строгий максимум (либо минимум) на K в точке φ_0, т. е. $\varphi_0(x_0) > \varphi(x_0)$ (либо $\varphi_0(x_0) < \varphi(x_0)$) при всех $\varphi \in K - \varphi_0$.

Очевидно, что H-достижимая точка является экстремальной в K. H-достижимые точки K и достижимые представления кольца R друг другу соответствуют.

Исходя из леммы настоящей статьи, теоремы 4 (стр. 79) статьи (1), статьи (3) и теоремы Мазура (5), используемой в этой статье, можно доказать следующие теоремы.

---

* Лемма 1 статьи (2) остается верной при старой формулировке в новом определении опорного пучка; доказательство немного меняется.

** Совокупность S_1 представлений кольца R $(S_1 \subseteq S)$ называется полной, если для каждого $x \in R$ имеется $L \in S_1$, так что оператор A_x^L не является нулевым.

Теорема 5. *Если достижимое представление L_0 кольца R точно реализует хорошо представимый элемент $x_0 \in H$ на левом краю c-спектра, то выполняется следующее:*

а) *Число c является простым характеристическим числом оператора $A_{x_0}^{L_0}$.*

б) *Число c является характеристическим числом оператора $A_{x_0}^{L}$ $(L \in S)$ в том и лишь в том случае, когда представление L_0 является частью представления L; если $\xi \in \mathfrak{G}_L$, $\|\xi\| = 1$ и L_0 неэквивалентно части L, то $(A_{x_0 - ce}^{L}\xi, \xi) > 0$.*

Теорема 6. *Пусть пространство H эрмитовых элементов кольца R сепарабельно и полно по норме: $\|x\| = \sup\limits_{L \in S} |(A_x^L \xi_L, \xi_L)|$, $x \in H$. Тогда, по указанной здесь норме, совокупность хорошо представимых элементов из H содержит подмножество, которое является плотным G_δ-множеством в H*.*

Теорема 7. *В условиях предыдущей теоремы множество достижимых циклических представлений кольца R является полным.*

Теорема 8. *Пусть L — циклическое представление кольца R теоремы 6. Для каждого вектора ξ $(\xi \neq \theta)$ пространства $\mathfrak{G}_L$ можно указать последовательность $\{L_n\}_{1 \leqslant n < \infty}$ циклических представлений кольца R, каждое из которых является прямой суммой конечного числа достижимых представлений кольца R, чтобы выполнялось:*

$$\lim_{n \to \infty} (A_x^{L_n} \xi^{(n)}, \xi^{(n)}) = (A_x^L \xi, \xi), \quad x \in R,$$

где $\xi^{(n)}$ есть циклический вектор представления L_x $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Одесский электротехнический институт связи

Поступило 5 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Наймарк, Усп. матем. наук, 3, в. 5 (27), 52 (1948). [2] Д. П. Мильман и М. А. Рутман, ДАН, 60, № 1 (1948). [3] Д. Мильман, ДАН, 59, № 6 (1948). [4] В. Р. Гантмахер и В. Л. Шмульян, Матем. сборн., 8 (50) (1940). [5] S. Masur, Studia Math., 4 (1934).

* Если c_1 и c_2 суть края спектра x_0, то, очевидно, $\|x\| = \max [|c_1|, |c_2|]$. G_δ-множеством называется пересечение счетного числа открытых множеств.