Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 3

*МАТЕМАТИКА*

М. Г. КРЕЙН

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ СТРУНЫ ПО СПЕКТРУ ЕЕ ЧАСТОТ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 XI 1950)*

1. Рассмотрим струну $S$, натянутую единичной силой между точками оси абсцисс $x=-1$ и $x=1$. Пусть $\sigma(x)$ $(-1<x\leqslant 1,\ \sigma(-1)=0)$ — масса отрезка струны от точки $-1$ до точки $x$ включительно. Как известно [1], квадраты $\lambda_k=p_k^2$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ частот ее свободных гармонических колебаний суть характеристические числа нагруженного интегрального уравнения:

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}K(x, s)\varphi(s)\,d\sigma(s), \tag{1}$$

где ядро

$$K(s, x)=K(x, s)={}^1/_2(1+x)(1-s) \quad \text{при} \quad x\leqslant s$$

есть функция влияния струны.

У неубывающей функции $\sigma(x)$ существует почти всюду производная $\sigma'(x)$. Если функция $\sigma(x)$ абсолютно непрерывна, то уравнение (1) эквивалентно дифференциальной системе:

$$\varphi''(x)+\lambda\rho(x)\varphi(x)=0, \quad \varphi(\pm 1)=0, \tag{2}$$

где $\rho(x)=\sigma'(x)$ (почти всюду).

Мы будем рассматривать общий случай уравнения (1), предполагая, что функция $\sigma(x)$ может состоять из абсолютно непрерывной части, сингулярной части и функции чистых скачков (отвечающей сосредоточенным массам на струне).

Теорема 1. *Для частот $p_0<p_1<p_2<\ldots$ струны с любой функцией распределения масс $\sigma(x)$ имеет место асимптотическая формула*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{p_n}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\sigma'(x)}\,dx. \tag{3}$$

Для случая функции $\sigma(x)$, имеющей всюду положительную достаточно гладкую производную, формула (3) известна еще из исследований Лиувилля [2]. В нашем общем случае она показывает, что предел отношения $n/p_n$ вполне определяется абсолютно непрерывной частью функции $\sigma(x)$ и, следовательно, никак не зависит от ее сингулярной части и функции скачков.

При доказательстве (3) мы использовали существенно результаты наших статей [3,4].

Из тех же статей [3,4] легко вытекает, что существование конечного предела для отношения $n/p_n$ ни в какой мере не является достаточным условием того, чтобы последовательность $(0<)\, p_0 < p_1 < p_2 < \dots$ была спектром частот некоторой струны $S$.

2. Струну $S$ будем называть симметричной, если

$$\sigma(1) - \sigma(x+0) = \sigma(-x-0) - \sigma(-1) \quad (-1 < x - 1).$$

Теорема 2. *Для того чтобы последовательность положительных чисел $p_0 < p_1 < p_2 < \dots$ была спектром частот некоторой симметричной струны $S$, необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходилось произведение*

$$\Delta(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \quad (\lambda_n = p_n^2,\ n = 0, 1, 2, \dots)$$

*и чтобы*

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2n}^2 \Delta'(\lambda_{2n})} < \infty. \tag{4}$$

Неравенство (4) имеет простой механический смысл: его левая часть, будучи удвоенной, дает массу всей струны $S$ (при условии, что струна не несет „лишних“ масс — масс, сосредоточенных на концах).

Нетрудно также показать, что условие (4) эквивалентно условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 \,|\Delta'(\lambda_n)|} < \infty.$$

Докажем сперва достаточность условия (4).

Покажем

$$D_n(\lambda) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{2k}}\right), \quad E_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{2k-1}}\right),$$

$$\Delta_n(\lambda) = \prod_{k=0}^{2n-1}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Как известно ([5,1]), отношение $E_n / D_n$ разлагается в непрерывную дробь Стильтьеса:

$$E_n(-\lambda) / D_n(-\lambda) = l_n^{(n)} + \frac{1\,|}{|\, m_n^{(n)}\lambda} + \frac{1\,|}{|\, l_{n-1}^{(n)}} + \frac{1\,|}{|\, m_{n-1}^{(n)}\lambda} + \dots + \frac{1\,|}{|\, m_1^{(n)}\lambda} + \frac{1\,|}{|\, l_0^{(n)}},$$

где все числа $l_k^{(n)}$ и $m_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ положительны.

Рассмотрим симметричную струну (нить) $S^{(n)}$, которая несет $n$ пар бусинок масс $m_1, m_2, \dots, m_n$, расположенных от середины нити соответственно на расстояниях $l_0^{(n)}, l_0^{(n)} + l_1^{(n)}, \dots, l_0^{(n)} + l_1^{(n)} + \dots + l_{n-1}^{(n)} (= 1 - l_n^{(n)})$.

Как известно ([6,7,1]), квадратами частот нити $S^{(n)}$, натянутой единичной силой, будут числа $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{2n-1}$.

Обозначим через $\sigma_n(x)$ $(-1 < x \leqslant 1,\ \sigma_n(-1) = 0)$ массу отрезка нити $S^{(n)}$ от точки $-1$ до точки $x$.

Можно показать, что

$$\frac{1}{2}\,\sigma_n(1) = m_1^{(n)} + m_2^{n} + \dots + m_n^{(n)} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{2k}^2 \Delta_n'(\lambda_{2k})} < -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2k}^2 \Delta'(\lambda_{2k})}.$$

Следовательно, при выполнении условия (4) неубывающие функции $\sigma_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ равномерно ограничены. По теореме Хелли, всегда найдется неубывающая функция $\sigma(x)$, к которой в существенном будет сходиться некоторая подпоследовательность $\sigma_{n_\nu}(x)$ $(\nu=1, 2, \ldots)$.

Нетрудно убедиться в том, что струна $S$ с предельным распределением масс $\sigma(x)$ будет иметь заданный спектр $\{\sqrt{\lambda_n}\}_0^\infty$.

Для доказательства необходимости условия (4) введем в рассмотрение струну $S^*$, получающуюся из струны $S$ (без „лишних" масс на концах) путем скрепления ее концов с идеально гладкими колечками „нулевого" радиуса, свободно скользящими по прямым $x=\pm 1$ плоскости колебаний $XY$.

Пусть $\lambda_0^* = 0 < \lambda_1^* < \lambda_2^* < \ldots$ — последовательность квадратов частот струны $S^*$. Положим

$$D(\lambda) = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{2k}}\right), \quad E(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{2k-1}}\right),$$

$$D^*(\lambda) = M\lambda\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{2k}^*}\right), \quad E^*(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{2k-1}^*}\right),$$

где $2M$ — масса всей струны $S$.

Оказывается, имеют место абсолютно сходящиеся разложения:

$$\frac{D^*(\lambda)}{D(\lambda)} = -\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{2k}\Delta'(\lambda_{2k})}\,\frac{1}{\lambda_{2k}-\lambda},$$

$$\frac{E^*(\lambda)}{E(\lambda)} = 1+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{2k-1}\Delta'(\lambda_{2k-1})}\,\frac{1}{\lambda_{2k-1}-\lambda}.$$

В частности, из первого равенства заключаем, что величина левой части (4) равна $M$ $(<\infty)$.

Между прочим,

$$D(\lambda)E^*(\lambda) - D^*(\lambda)E(\lambda) \equiv 1.$$

3. Отметим некоторые следствия теоремы 2.

Пусть $\{p_n\}_0^\infty$ — спектр какой-либо симметричной струны, а $\{p'_n\}_0^\infty$ — возрастающая последовательность положительных чисел такая, что при некотором целом $h \geqslant 0$ выполняется равенство $p'_{n+h} = p_n$ для всех $n \geqslant n_0$. Тогда $\{p'_n\}_0^\infty$ также будет спектром некоторой струны.

С другой стороны, если, например, из спектра $p_n = c(n+1)^2$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ однородной струны выбросить хотя бы одну частоту, то оставшиеся частоты уже не составят спектра никакой другой симметричной струны.

4. Приложим в середине струны сосредоточенную пульсирующую силу $F=\sin\sqrt{\lambda}t$. Тогда удвоенная амплитуда вынужденного колебания под действием этой силы будет $E(\lambda)/D(\lambda)$. Оказывается,

$$\frac{E(\lambda)}{D(\lambda)} = \gamma + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho_k}{\lambda_k-\lambda} \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho_k}{\lambda_k}<\infty\right),$$

где $\rho_k > 0$ $(k=0, 1, \ldots)$, а $\gamma \geqslant 0$. Величина $\gamma > 0$, между прочим, тогда и только тогда, когда некоторый отрезок $(-\varepsilon, \varepsilon)$ струны $S$ не несет масс $(\sigma(\varepsilon) - \sigma(-\varepsilon) = 0)$.

Составим эрмитово-положительную функцию ([8]):

$$F(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho_k}{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_k}\,t \qquad (-\infty<t<\infty).$$

При $t>0$ функция $F(0)-F(t)$ дает удвоенное смещение середины $O$ струны, вызванное за время $t$ действием постоянной единичной силы, внезапно приложенной в точке $O$ к первоначально покоившейся струне.

Обозначим через $\mu(t)$ $(0<t<\infty)$ центральную функцию для $F(t)$ (ее определение см. в ([8])).

Введем, кроме того, в рассмотрение функцию

$$\tau(x)=2\int_0^x\sqrt{\sigma'(\xi)}\,d\xi \qquad (0<x\leqslant 1).$$

Точку $x_0$ $(0<x_0\leqslant 1)$ назовем точкой роста слева $\tau(x)$, если $\tau(x)<\tau(x_0)$ для любого $x<x_0$.

Теорема 3. *Если $x$ — точка роста слева функции $\tau(x)$, то* $\mu(\tau(x))=1-x$.

Из теоремы 3 следует, что „плотность" $\sigma'(x)$ распределения масс на симметричной струне однозначно определяется спектром струны.

Применение этого результата к дифференциальной системе (2) с неотрицательной и интегрируемой функцией $\rho(x)=\rho(-x)$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ очевидно. Оно дает полное решение задачи однозначности, изучавшейся Боргом ([9]). Можно показать, что в точках роста (слева) функции $\tau(x)$ однозначно определяется и сама функция $\sigma(x)$. В частности, функция $\sigma(x)$ вполне определяется, если почти всюду $\sigma'(x)\neq 0$. Повидимому, функция $\sigma(x)$ симметричной струны всегда однозначно определяется спектром частот струны. Нами показано, что это утверждение верно, если оно верно для специального случая, когда $\sigma'(x)=0$ (почти всюду).

Поступило
21 XI 1950

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн, Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, 1950. [2] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, 1933. [3] М. Г. Крейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 2. 309 (1947). [4] М. Г. Крейн, ДАН, 68, № 6 (1950). [5] Т. Стильтьес, Исследование о непрерывных дробях, 1936. [6] В. П. Терских, Тр. 1-й дизельн. конференции. Наркомтяжпром, 1934. [7] Ф. М. Диментберг, Статья в сборн. Динамика и прочность коленчатых валов, АН СССР, 1948. [8] М. Г. Крейн, ДАН, 76, № 1 (1951). [9] G. Borg, Acta Math., 78, 1—2 (1946).