Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

В. А. ЕФРЕМОВИЧ

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 1 XII 1950)

Топология заимствует из метрической геометрии лишь одно — отношение бесконечной близости между точкой и множеством. Классическое определение [1] (П. Александров, К. Куратовский) именно эту мысль и выражает; оно может быть сформулировано так: пространство называется (общим) топологическим, если для каждого его множества A указано, какие точки считаются бесконечно близкими к A; их совокупность $\overline{A}$ называется замыканием A. Всякое понятие или свойство, которое может быть сформулировано в терминах бесконечной близости точки и множества, называется топологическим.

Заимствуя из метрической геометрии отношение бесконечной близости между множеством и множеством ($\rho(A, B) = 0$), придем к понятию инфинитезимальной структуры пространства *.

1. Множество R назовем инфинитезимальным пространством, если для каждых двух его подмножеств A и B указано, считаются они близкими ($A \delta B$) или нет ($A \bar{\delta} B$). При этом каждое подмножество из R, естественно, также приобретает инфинитезимальную структуру.

Два инфинитезимальных пространства (или два множества) назовем эквиморфными, если они изоморфны по своей инфинитезимальной структуре, т. е. если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее отношение близости. Такое соответствие будем называть эквиморфизмом. Всякое метрическое пространство автоматически наделено инфинитезимальной структурой в силу неизменного соглашения:

Утверждения $A \delta B$ и $\rho(A, B) = 0$ равносильны.

Для метрических пространств эквиморфизм — это взаимно-однозначное и взаимно равномерно непрерывное соответствие, так как функция, отображающая метрическое пространство в метрическое, тогда и только тогда равномерно непрерывна, если она переводит любые два бесконечно близкие множества в бесконечно близкие. (Последнее свойство является инфинитезимальным эквивалентом равномерной непрерывности.)

Всякое понятие, или свойство, которое можно формулировать в терминах близости, назовем инфинитезимальным. Ясно, что все инфинитезимальные свойства у эквиморфных пространств одинаковы.

Каждое инфинитезимальное пространство автоматически является топологическим. Два эквиморфных пространства, конечно, гомеоморфны (но не наоборот: так, поверхности: $z = \frac{1}{+\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, параболоид

* Понятие инфинитезимального пространства было введено автором в 1936 г. (доклад „Геометрия бесконечной близости“ на конференции Института математики Московского государственного университета).

$z = x^2 + y^2$, евклидова плоскость E^2, плоскость Лобачевского H^2 — все гомеоморфны друг другу, но никакие две из них неэквиморфны ([2]); всякое топологическое понятие является также и инфинитезимальным. Основные топологические понятия просто формулируются в терминах близости. Предельная точка для A — это точка x, удовлетворяющая условию $x \,\delta\, A - x$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если из $x_0 \,\delta\, A$ следует $f(x_0) \,\delta\, f(A)$ для всякого множества A. Понятие равномерной непрерывности, не будучи топологическим, оказывается инфинитезимальным, как было уже отмечено. То же нужно сказать о понятиях полноты пространства, канторовой связности множества (нельзя разбить на две неблизких непустых части) и некоторых других. Окрестностью множества A назовем всякое множество U_A, удовлетворяющее условию $R - U_A \,\overline{\delta}\, A$. (Если A состоит из одной точки, то последнее определение эквивалентно обычному в топологии, в общем же случае так определенная окрестность множества A имеет совсем иной смысл, чем обычно принятый в топологии, и даже не является топологическим понятием.)

При изучении инфинитезимальных пространств и инфинитезимальных свойств фигур возникает важная задача построения инфинитезимальных инвариантов, позволяющих различать гомеоморфные, но неэквиморфные фигуры (или пространства).

2. Чтобы понятие инфинитезимального пространства было достаточно содержательным, отношение близости нужно подчинить некоторым аксиомам. Вот, мне кажется, безусловный минимум:

Аксиома 0. Отношение близости симметрично: $A \,\delta\, B$ равносильно $B \,\delta\, A$.

Аксиома 1. Утверждение $A \,\overline{\delta}\, C$, $B \,\overline{\delta}\, C$ равносильно $A \cup B \,\overline{\delta}\, C$.

Аксиома 2. $a \,\delta\, b$ равносильно $a = b$ (a и b — точки). (Аксиома 2 исключает пространства, в которых две фиксированные точки могут быть бесконечно близкими; чтобы не исключать их, нужно эту аксиому заменить ослабленной: $a \,\delta\, a$).

Далее существенную роль играет аксиома, которая, так сказать, исполняет обязанности аксиомы треугольника.

Аксиома 3. Если при любом разбиении пространства на конечное число слагаемых всегда найдется хоть одно слагаемое, бесконечно близкое и к A и к B, то $A \,\delta\, B$.

Как заметила Н. С. Рамм, эта аксиома эквивалентна аксиоме отделимости:

Аксиома 3'. Если $A \,\overline{\delta}\, B$, то существует окрестность U_A такая, что $U_A \,\overline{\delta}\, B$.

Нетрудно видеть, что инфинитезимальное пространство, удовлетворяющее указанным аксиомам, будучи рассматриваемо как топологическое пространство, удовлетворяет известным аксиомам топологического пространства, именно будет регулярным пространством.

3. Назовем инфинитезимальным многообразием инфинитезимальное пространство M, допускающее введение в нем римановой метрики без особенностей. При этом, конечно, подразумевается, что отношение бесконечной близости множеств, вытекающее из римановой метрики, совпадает с отношением близости, установленным в M.

Эквиморфные римановы многообразия имеют эквиморфные универсальные накрывающие, поэтому инфинитезимальная структура многообразия определяет инфинитезимальную структуру универсального накрывающего. В частности, отсюда следует, что для замкнутого топологического многообразия M^n инфинитезимальная структура универсального накрывающего $\widetilde{M}^n$ является **топологическим инвариантом** M^n. В самом деле, топологическая структура замкнутого многообразия однозначно определяет его инфинитезимальную структуру.

Вот небольшое приложение этого инварианта. Два замкнутых римановых n-мерных многообразия, $n \geqslant 2$, одно из которых локально евклидово, а другое локально имеет метрику Лобачевского, не могут быть гомеоморфны. Действительно, для первого из них универсальным накрывающим является E^n, для второго — пространство Лобачевского H^n, но E^n неэквиморфно H^n при $n \geqslant 2$ ([2]). Для n четного только что доказанное утверждение представляет собой хорошо известный факт, ибо при n четном эйлерова характеристика второго многообразия отрицательна, а первого равна нулю. Однако при n нечетном рассмотрение эйлеровой характеристики, конечно, ничего не дает.

Поступило
29 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Alexandroff u. H. Hopf, Topologie, 1, 1935, стр. 25, 26; Ф. Хаусдорф, Теория множеств, 1937, стр. 101. [2] В. Ефремович, Усп. матем. наук, 4, в. 2 (30) 178 (1949).