Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ДЮБЮК и А. С. МОНИН

О СОВМЕСТНО-ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 XI 1950)

Рассмотрим следующую краевую задачу: требуется определить функции $u_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, N)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{d}{dx}\left[k_i(x)\frac{du_i(x)}{dx}\right]-q_i(x)\,u_i(x)+\lambda\rho_i(x)\,u_i(x)=0 \tag{1}$$

и краевым условиям

$$\overset{1}{u}{}_i'+h_i\overset{1}{u}_i=0, \qquad \overset{0}{u}{}_i'=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\overset{0}{u}_j, \tag{2}$$

где $\overset{1}{u}_i=u_i(x_i)$, $\overset{1}{u}{}_i'=u_i'(x_i)$, $\overset{0}{u}_i=u_i(0)$, $\overset{0}{u}{}_i'=u_i'(0)$.

Примем следующие ограничения:

A. $\rho_i(x)\geqslant 0$, $k_i(x)\geqslant 0$, $0<k_i(0)=\overset{0}{k}_i<\infty$, $k_i(x_i)=\overset{1}{k}_i<\infty$.
B. При любом $i\neq 1$ $a_{1i}\neq 0$, $a_{i1}\neq 0$, $a_{1i}a_{i1}>0$.
C. При любых $i<j<k$ $a_{ij}a_{jk}a_{ki}=a_{ji}a_{kj}a_{ik}$.
Из B и C следует, что при любых $i\neq j$ $a_{ij}a_{ji}\geqslant 0$.

Алгебраический смысл условия C заключается в том, что при выполнении этого условия матрицу $\| a_{ij}\|$ можно сделать симметричной умножением ее элементов на числа, зависящие лишь от одного индекса. Условие C заведомо выполняется, если матрица $\| a_{ij}\|$ симметрична $(a_{ij}=a_{ji})$. В ряде случаев выполнение условия C обеспечивается наличием достаточного количества нулей среди элементов a_{ij}. Например, при $N=3$ достаточно иметь $a_{23}=a_{32}=0$.

Сформулированная краевая задача с выполнением условия C нередко возникает при описании распределения тех или иных субстанций в многослойных средах. При этом второе из условий (2) выражает обычно условие баланса потоков субстанций через границу между различными средами. Примером может служить описание испарения с поверхности воды. Обозначив u_1, u_2, u_3 температуру воздуха и воды и удельную влажность в воздухе и описывая распределение этих «субстанций» с помощью уравнений диффузии, мы должны будем записать условия баланса тепла в воздухе и в воде и условие баланса влаги у поверхности воды. Вследствие большой теплоемкости воды при этом можно будет считать, что теплота испарения заимствуется исключительно из воды, что приводит к выполнению условия C в форме $a_{23}=a_{32}=0$.

Пусть $v_i(x,\lambda)$ и $w_i(x,\lambda)$ — линейно-независимые решения i-го уравнения (1). Тогда всякое его решение, удовлетворяющее первому из краевых условий (2), можно записать в виде

$$u_i(x, \lambda) = \beta_i \{[v_i(x, \lambda)\, w_i'(x_i, \lambda) - w_i(x, \lambda)\, v_i'(x_i, \lambda)] + \\ + h_i [v_i(x, \lambda)\, w_i(x_i, \lambda) - w_i(x, \lambda)\, v_i(x_i, \lambda)]\}, \tag{3}$$

где β_i — произвольные постоянные.

Обозначим

$$\Delta_i(\lambda) = [v_i(0, \lambda)\, w_i'(x_i, \lambda) - w_i(0, \lambda)\, v'(x_i, \lambda)] + \\ + h_i [v_i(0, \lambda)\, w_i(x_i, \lambda) - w_i(0, \lambda)\, v_i(x_i, \lambda)],$$

$$\bar{\Delta}_i(\lambda) = [v_i'(0, \lambda)\, w'(x_i, \lambda) - w_i'(0, \lambda)\, v_i'(x_i, \lambda)] + \\ + h_i [v_i'(0, \lambda)\, w_i(x_i, \lambda) - w_i'(0, \lambda)\, v_i(x_i, \lambda)].$$

Тогда второе из краевых условий (2) примет вид

$$\sum_{j=1}^{N} [a_{ij} \Delta_j(\lambda) - \delta_{ij} \bar{\Delta}_j(\lambda)]\, \beta_j = 0,$$

так что рассматриваемая краевая задача будет иметь нетривиальные решения, если

$$\Delta(\lambda) = \mathrm{Det}\, \| a_{ij} \Delta_j(\lambda) - \delta_{ij} \bar{\Delta}_j(\lambda) \| = 0. \tag{4}$$

Из векового уравнения (4) должны быть определены собственные значения $\lambda = \lambda_n$. Пусть $\mathbf{u}_n(x) = \{u_{1n}(x), \ldots, u_{Nn}(x)\}$ — собственные функции (3), соответствующие собственному значению λ_n. Чтобы иметь возможность представить каждое решение неоднородных уравнений (1) в виде ряда по собственным функциям, воспользуемся следующей теоремой:

Можно подобрать такие числа $\alpha_i > 0$, *что при* $n \neq m$

$$H[\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_m] = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_0^{x_i} \rho_i u_{in} u_{im}\, dx = 0. \tag{5}$$

Действительно, из (1) получаем

$$\frac{d}{dx} [k_i (u_{im} u_{in}' - u_{in} u_{im}')] + (\lambda_n - \lambda_m)\, \rho_i u_{in} u_{im} = 0,$$

откуда, в силу (2),

$$\sum_{j=1}^{N} \overset{0}{k}_i a_{ij} (\overset{0}{u}_{in} \overset{0}{u}_{jm} - \overset{0}{u}_{jn} \overset{0}{u}_{im}) + (\lambda_n - \lambda_m) \int_0^{x_i} \rho_i u_{in} u_{im}\, dx = 0.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{i,\, j=1}^{N} \alpha_i \overset{0}{k}_i a_{ij} (\overset{0}{u}_{in} \overset{0}{u}_{jm} - \overset{0}{u}_{jn} \overset{0}{u}_{im}) + (\lambda_n - \lambda_m)\, H[\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_m] = 0,$$

и остается подобрать числа α_i так, чтобы первая сумма в полученном выражении обращалась в нуль. Для этого α_i должны быть определены из уравнений

$$\alpha_i \overset{0}{k}_i a_{ij} - \alpha_j \overset{0}{k}_j a_{ji} = 0, \tag{6}$$

т. е. числа $b_{ij} = \alpha_i \overset{0}{k}_i a_{ij}$ должны образовывать симметричную матрицу.

Вследствие С $\frac{N(N-1)}{2}$ уравнений (6) относительно N неизвестных α_i совместны и имеют нетривиальные решения, причем С является для этого необходимым и достаточным условием. Можно положить, например,

$$\alpha_i = \frac{\gamma^2 a_{1i}}{\overset{\circ}{k}_i a_{i1}}, \quad \gamma^2 = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\overset{\circ}{k}_i} \frac{a_{1i}}{a_{i1}} \int_0^{x_i} \rho_i u_{in}^2 dx\right]^{-1}. \tag{7}$$

Число $\gamma = \gamma_n$ будем называть совместной нормой функций $u_{1n}, \ldots, u_{Nn}$. Собственные функции $\bar{\mathbf{u}}_n = \gamma_n \mathbf{u}_n$, которые, очевидно, удовлетворяют условиям

$$H[\bar{\mathbf{u}}_n, \bar{\mathbf{u}}_m] = 0, \quad H[\bar{\mathbf{u}}_n, \bar{\mathbf{u}}_n] = 1,$$

будем называть совместно-ортогональными и совместно-нормальными. В дальнейшем будем пользоваться лишь совместно-нормальными собственными функциями, опуская при их написании черточку сверху.

Рассмотрим теперь функции $f_i(x)$, определенные на интервалах $(0, x_i)$ и удовлетворяющие условиям $\int_0^{x_i} f_i^2(x)\rho_i(x)\,dx < \infty$. Поставим задачу апроксимации вектора $\mathbf{f}(x) = \{f_1(x), \ldots, f_N(x)\}$ с помощью линейной комбинации собственных функций $\mathbf{g}_k(x) = \sum_{n=1}^{k} g_n \mathbf{u}_n(x)$, имея при этом вначале в виду лишь апроксимацию в среднем, т. е. требуя, чтобы величина

$$\delta_k^2(g_1, \ldots, g_k) = H[\mathbf{f} - \mathbf{g}_k, \mathbf{f} - \mathbf{g}_k] \tag{8}$$

имела минимальное значение. Для этого, очевидно, должно быть

$$g_n = f_n = H[\mathbf{f}, \mathbf{u}_n] = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_0^{x_i} f_i(x)\, u_{in}(x)\, \rho_i(x)\, dx. \tag{9}$$

Числа f_n будем называть совместными коэффициентами Фурье функций $f_i(x)$. Поскольку

$$\delta_k^2(f_1, \ldots, f_k) = H[\mathbf{f}, \mathbf{f}] - \sum_{n=1}^{k} f_n^2,$$

имеем неравенство Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \leqslant H[\mathbf{f}, \mathbf{f}], \tag{10}$$

так что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$ сходится. Однако можно показать, что в (10) имеет место знак равенства, т. е. имеет место совместная полнота собственных функций $\mathbf{u}_n$, а поэтому и сходимость «в совместном среднем» рядов Фурье

$$\mathbf{f}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathbf{u}_n(x). \tag{11}$$

Используя следующее из (1) соотношение

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_0^{x_i} [u_{in} (k_i u'_{in})' - q_i u_{in}^2]\, dx + \lambda_n H [\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n] = 0,$$

получим

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_0^{x_i} (k_i u'^2_{in} + q_i u^2_{in})\, dx + \sum_{i,\, j=1}^{N} b_{ij} \overset{0}{u}_{in} \overset{0}{u}_{jn} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i h_i \overset{1}{k}_i \overset{1}{u}{}^2_i,$$

откуда видно, что если матрица $\| b_{ij} \|$ положительно-определенна, $q_i(x) \geqslant 0$ и $h_i \geqslant 0$, то все собственные значения положительны.

Теперь очевидно, что рассматриваемая краевая задача эквивалентна вариационной задаче нахождения минимума функционала

$$D[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_0^{x_i} (k_i u'^2_i + q_i u_i^2)\, dx + \sum_{i,\, j=1}^{N} b_{ij} \overset{0}{u}_i \overset{0}{u}_j + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i h_i \overset{1}{k}_i \overset{1}{u}{}^2_i \tag{12}$$

при условии $H[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = 1$.

Чтобы показать эквивалентность краевой и вариационной задач, вычислим вариацию

$$\delta (D - \lambda H) = 2 \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_0^{x_i} (k_i u'_i \delta u'_i + q_i u_i \delta u_i)\, dx + 2 \sum_{i,\, j=1}^{N} b_{ij} \overset{0}{u}_j \delta \overset{0}{u}_i +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{N} \alpha_i h_i \overset{1}{k}_i \overset{1}{u}_i \delta \overset{1}{u}_i - 2\lambda \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_0^{x_i} \rho_i u_i \delta u_i\, dx.$$

Проинтегрировав по частям выражение, содержащее $\delta u'_i$, и заметив, что

$$\sum_{i,\, j=1}^{N} b_{ij} \overset{0}{u}_j \delta \overset{0}{u}_i = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overset{0}{k}_i \delta \overset{0}{u}_i \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \overset{0}{u}_j,$$

мы получим

$$\delta (D - \lambda H) = 2 \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_0^{x_i} [-(k_i u'_i)' - q_i u_i - \lambda \rho_i u_i]\, \delta u_i\, dx +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overset{0}{k}_i \Big(-\overset{0}{u}{}'_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \overset{0}{u}_j \Big) \delta \overset{0}{u}_i + 2 \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overset{1}{k}_i (\overset{1}{u}{}'_i + h_i \overset{1}{u}_i)\, \delta \overset{1}{u}_i.$$

Приравнивая полученное выражение нулю, получим обычным образом уравнения (1) и краевые условия (2).

Но, исходя из вариационной задачи, мы можем доказать не только условие полноты (знак равенства в (10)), но и равномерную сходимость рядов Фурье (11). Доказательство будет дословным повторением рассуждений, приведенных Курантом и Гильбертом [1].

Использование разложений по совместно-ортогональным системам функций может послужить эффективным средством для решения краевых задач типа (1) — (2).

Центральный институт прогнозов

Поступило
24 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, гл. 6, 1933.