Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

В. М. ДУБРОВСКИЙ

О СВОЙСТВЕ РАВНОСТЕПЕННОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ СЕМЕЙСТВА ВПОЛНЕ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА ОТНОСИТЕЛЬНО СОБСТВЕННОГО И НЕСОБСТВЕННОГО БАЗИСОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 XI 1950)

Пусть $\mathfrak{A}$ есть множество некоторых элементов и $\mathfrak{M}$ — семейство подмножеств множества $\mathfrak{A}$. Предположим, что семейство $\mathfrak{M}$ содержит какие угодно разности и конечные или счетные суммы входящих в него множеств, все множество $\mathfrak{A}$ и пустое множество.

В последующем будет рассматриваться семейство $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества $\Phi(\alpha, e)$, определенных и конечных на семействе $\mathfrak{M}$, зависящее от параметра α. Множество всех возможных значений параметра α обозначим через A, не делая никаких предположений о его мощности. Значения рассматриваемых функций суть вещественные числа.

Определения.

I. Семейство $\mathfrak{N}$ обладает свойством равномерной аддитивности, если $\Phi(\alpha, e_{n+1}+e_{n+2}+\ldots)\to 0$ равномерно относительно параметра $\alpha\in A$ при $n\to\infty$ для любой суммы $e_1+e_2+\ldots$ взаимно не налегающих множеств, входящих в семейство $\mathfrak{M}$.

II. Если $M(e)$ — неотрицательная вполне аддитивная функция множества, определенная на семействе $\mathfrak{M}$, обладающая тем свойством, что равенство $M(e)=0$ $(e\in\mathfrak{M})$ влечет за собой равенство $\Phi(\alpha, e)=0$ для любого $\alpha\in A$, то будем называть функцию $M(e)$ базисом семейства $\mathfrak{N}$. Если $M(\mathfrak{A})$ конечно, то назовем функцию $M(e)$ собственным базисом; если же $M(\mathfrak{A})$ бесконечно, то будем называть функцию $M(e)$ несобственным базисом. В последнем случае будем всегда предполагать, что существует разложение $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\ldots$ пространства $\mathfrak{A}$ на взаимно не налегающие множества, входящие в $\mathfrak{M}$, такое, что $M(\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\ldots+\mathfrak{A}_n)$ конечно при любом n.

III. Семейство $\mathfrak{N}$ обладает свойством равностепенной непрерывности относительно базиса $M(e)$, если $\Phi(\alpha, e)\to 0$ равномерно относительно параметра $\alpha\in A$ и множества $e\in\mathfrak{M}$ при $M(e)\to 0$. Если семейство $\mathfrak{N}$ обладает последним свойством, сводясь к одной вполне аддитивной функции $\Phi(e)$, то будем говорить, что эта функция абсолютно непрерывна относительно базиса $M(e)$.

Теорема А. *Равномерная аддитивность семейства $\mathfrak{N}$ влечет за собой существование собственного базиса и свойство равностепенной непрерывности семейства $\mathfrak{N}$ относительно любого собственного базиса* [1,2].

Теорема В. *Равностепенная непрерывность семейства $\mathfrak{N}$ относительно собственного базиса влечет за собой равномерную аддитивность семейства $\mathfrak{N}$ и его равностепенную непрерывность относительного любого другого собственного базиса.*

Первое утверждение теоремы В очевидно, второе же утверждение вытекает из теоремы А. Доказательство второго утверждения теоремы В, независимое от теоремы А, имеется в ([3]).

Целью настоящей заметки является показать, что взаимоотношение свойств вполне аддитивных функций множества, устанавливаемое теоремами А и В, видоизменяется, если наряду с собственными базисами рассматривать также базисы несобственные и выяснить характер этого видоизменения.

Простейшие примеры показывают, что из равностепенной непрерывности относительно несобственного базиса не вытекает равностепенная непрерывность относительно собственного базиса и равномерная аддитивность.

Пусть, например, $\mathfrak{A}$ есть множество всех вещественных чисел и $\mathfrak{M}$ — семейство измеримых множеств вещественных чисел. Положим

$$\Phi(\alpha, e) = \int\limits_e e^{-(x-\alpha)^2}\, dx,$$

где $\alpha \in \mathfrak{A}$, $e \in \mathfrak{M}$. Очевидно, $|\Phi(\alpha, e)| \leqslant \operatorname{mes} e$, каково бы ни было вещественное число α, так что для семейства $\Phi(\alpha, e)$ имеет место свойство равностепенной непрерывности относительно меры в смысле Лебега, рассматриваемой как несобственный базис. С другой стороны, семейство $\Phi(\alpha, e)$ не является равномерно аддитивным. Действительно, пусть $\mathfrak{A}_n$ — совокупность точек интервалов $n-1 \leqslant x < n$, $-n+1 \geqslant x > -n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Тогда, очевидно, $\Phi(\alpha, \mathfrak{A}_{n+1} + \mathfrak{A}_{n+2} + \ldots)$ не стремится к нулю равномерно относительно α при $n \to \infty$. В силу теоремы В, не существует поэтому собственного базиса семейства $\Phi(\alpha, e)$, относительно которого оно было бы равностепенно непрерывным.

Однако, с другой стороны, каждое из свойств равномерной аддитивности и равностепенной непрерывности относительно собственного базиса влечет за собой равностепенную непрерывность относительно любого несобственного базиса.

Докажем это, возвращаясь к общим предположениям относительно пространства $\mathfrak{A}$ и семейства $\mathfrak{M}$.

Теорема 1. *Пусть дано, что семейство $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций множества $\Phi(\alpha, e)$, определенных и конечных на семействе $\mathfrak{M}$, где α — параметр, обладает свойством равностепенной непрерывности относительно собственного базиса $m(e)$ (или свойством равномерной аддитивности).*

Тогда семейство $\mathfrak{N}$ обладает также свойством равностепенной непрерывности относительно любого несобственного базиса $M(e)$.

Доказательство. Согласно предположению, существует последовательность множеств $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$, для которой выполняются условия $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots$, $\mathfrak{A}_i \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_k = 0$ при $i \neq k$, $M(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_i)$ конечно, $M(\mathfrak{A}) = \infty$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$. Взяв сколь угодно малое положительное число ε, рассмотрим такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, чтобы из условия $m(e) < \delta$ $(e \in \mathfrak{M})$ вытекало бы неравенство $|\Phi(\alpha, e)| < \varepsilon$ для любого $\alpha \in A$. Полагая теперь $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{A}_{i+1} + \mathfrak{A}_{i+2} + \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots)$, возьмем n столь большим, чтобы имело место неравенство $m(\mathfrak{R}_n) < \delta$. Тогда $|\Phi(\alpha, e)| < \varepsilon$ для любого $\alpha \in A$ и любого $e \subset \mathfrak{R}_n$ $(e \in \mathfrak{M})$. Для семейства $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций и семейства множеств $e \subset \mathfrak{S}_n$, $e \in \mathfrak{M}$ базис $M(e)$ будет собственным и, следовательно, будет существовать положительное число $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ такое, что из условия $e \subset \mathfrak{S}_n$, $e \in \mathfrak{M}$, $M(e) < \Delta$ будет вытекать $|\Phi(\alpha, e)| < \varepsilon$ для любого $\alpha \in A$. Возьмем теперь множество $e \in \mathfrak{M}$, не предполагая, что оно является частью $\mathfrak{R}_n$ или $\mathfrak{S}_n$, для которого $M(e) < \Delta$, и представим его в виде суммы множеств $e\mathfrak{R}_n$ и $e\mathfrak{S}_n$. Тогда, очевидно, $|\Phi(\alpha, e\mathfrak{R}_n)| < \varepsilon$ и $|\Phi(\alpha, e\mathfrak{S}_n)| < \varepsilon$ для любого $\alpha \in A$, откуда $|\Phi(\alpha, e)| < 2\varepsilon$ для любого $\alpha \in A$.

Теорема, таким образом, доказана.

Возникает вопрос — существует ли какое-либо специальное свойство несобственного базиса, при наличии которого из равностепенной непрерывности семейства $\mathfrak{N}$ относительно этого базиса вытекала бы его равностепенная непрерывность относительно любого собственного базиса, а также равномерная аддитивность. Следующая простая теорема дает на этот вопрос отрицательный ответ.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ — последовательность взаимно не налегающих множеств ($\mathfrak{A}_n \in \mathfrak{M}$, $n = 1, 2, \ldots$), $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots$ Пусть $M(e)$ — любая неотрицательная вполне аддитивная функция множества, определенная на семействе $\mathfrak{M}$, обладающая тем свойством, что $M(\mathfrak{A})$ бесконечно, в то время как $M(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n)$ конечно при любом n.*

Тогда можно построить последовательность вполне аддитивных функций $\Phi_1(e), \Phi_2(e), \ldots$, определенных и конечных на семействе $\mathfrak{M}$, для которой $M(e)$ будет являться несобственным базисом, причем эта последовательность будет обладать свойством равностепенной непрерывности относительно $M(e)$, но не будет обладать этим свойством ни для какого собственного базиса (а также не будет обладать свойством равномерной аддитивности).

Доказательство. Взяв любое положительное число K, положим

$$\mathfrak{B}_n = \sum_{\nu=N_n+1}^{N_{n+1}} \mathfrak{A}_\nu \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $N_1 = 0$, $N_2 = m_1$, $N_3 = m_1 + m_2$, $N_4 = m_1 + m_2 + m_3, \ldots$, причем числа $m_1, m_2, \ldots$ подберем так, чтобы выполнялось условие $M(\mathfrak{B}_n) > K$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Взяв теперь любое натуральное число n и любое $e \in \mathfrak{M}$, положим $\Phi_n(e) = \dfrac{M(e\mathfrak{B}_n)}{M(\mathfrak{B}_n)}$. Тогда, очевидно, если $M(e) < K\varepsilon$, то $|\Phi_n(e)| < \varepsilon$ для любого n (ε — любое положительное число, $e \in \mathfrak{M}$), т. е. условие равностепенной непрерывности последовательности $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ относительно базиса $M(e)$ выполнено. С другой стороны, $\Phi_n(\mathfrak{B}_n + \mathfrak{B}_{n+1} + \mathfrak{B}_{n+2} + \cdots) = \Phi_n(\mathfrak{B}_n) = 1$, где $n = 1, 2, \ldots$, откуда последовательность $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ не обладает свойством равномерной аддитивности и, следовательно, не может обладать свойством равностепенной непрерывности относительно какого бы то ни было собственного базиса.

Теорема 3. *Вполне аддитивная функция множества $\Phi(e)$, определенная и конечная на семействе $\mathfrak{M}$, абсолютно непрерывна относительно любого базиса $M(e)$, собственного или несобственного.*

Доказательство. Предполагая, что теорема неверна, возьмем сходящийся ряд $a_1 + a_2 + \ldots$ с положительными членами. Тогда, очевидно, будут существовать положительное число b и последовательность множеств $e_1, e_2, \ldots$, для которых будут выполняться условия $M(e_n) < a_n$, $|\Phi(e_n)| > b$, $e_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, откуда $\mathfrak{F}(\mathfrak{r}_n) > b$, $M(\mathfrak{r}_n) < r_n$, где $\mathfrak{r}_n = e_n + e_{n+1} + e_{n+2} + \ldots$, $r_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$, $\mathfrak{F}$ означает полную вариацию функции Φ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Обозначим через $\mathfrak{P}$ общую часть всех множеств $\mathfrak{r}_n$. Тогда будем иметь $M(\mathfrak{P}) \leqslant M(\mathfrak{r}_n) < r_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $\mathfrak{r}_1 = (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2) + (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3) + \ldots + \mathfrak{P}$, откуда $M(\mathfrak{P}) = 0$, $\mathfrak{F}(\mathfrak{P}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{F}(\mathfrak{r}_n) \geqslant b$, в силу полной аддитивности $\mathfrak{F}$. Мы пришли, как легко видеть, к противоречию, и рассматриваемая теорема, следовательно, доказана.

Аналогичная теорема имеется у С. Сакса ([4]), но последний предполагает базис собственным.

Доказательство теоремы о том, что из равномерной аддитивности вытекает равностепенная непрерывность относительно любого собственного базиса, приведенное в ([2]), на основании только что рассмотренной теоремы можно применить и для случая несобственного базиса, и, таким образом, можно получить другое доказательство теоремы 1.

Поступило
26 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Дубровский, ДАН, 58, № 5 (1947). [2] В. М. Дубровский, Матем. сборн., 20 (62) 2, 317 (1947). [3] В. М. Дубровский, ДАН, 63, № 5 (1948). [4] С. Сакс, Теория интеграла, М., 1949.