Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. М. ЭЙДУС

О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 XI 1950)

1. Пусть конечная область Ω в пространстве переменных x_1, x_2, x_3 имеет кусочно-гладкую границу Γ, состоящую из трех частей $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Смешанная задача теории упругости состоит в отыскании в области Ω вектора смещений $\mathbf{u}$, удовлетворяющего уравнению

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{f} = 0 \tag{1}$$

и краевым условиям

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = 0, \tag{2}$$

$$u_n|_{\Gamma_2} = 0, \qquad t_\tau|_{\Gamma_2} = 0, \tag{3}$$

$$\mathbf{t}|_{\Gamma_3} = 0, \tag{4}$$

где u_n — нормальная составляющая вектора смещений, $\mathbf{t}$ — вектор напряжений, действующих на поверхность Γ, t_τ — касательная составляющая вектора $\mathbf{t}$, $\mathbf{f}$ — вектор объемных сил.

Обозначим через D класс векторных функций $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$, имеющих в Ω непрерывные производные первого порядка и таких, что

$$H(\mathbf{u}) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_i^2 \, d\Omega < \infty, \quad D(\mathbf{u}) = \int_\Omega \sum_{i,\,k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega < \infty.$$

Обозначим через $\dot{D}_1$ класс функций $\mathbf{u} \in D$, непрерывных на Γ_1 и удовлетворяющих условию (2). Введем в $\dot{D}_1$ норму следующим образом:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{H(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u})} \tag{5}$$

и обозначим через $\overset{0}{D}_1$ замыкание пространства $\dot{D}_1$.

Согласно [1], для решения смешанной задачи вариационным методом достаточно установить, что для всех $\mathbf{u} \in \overset{0}{D}_1$ имеют место неравенства

$$H(\mathbf{u}) < \alpha D(\mathbf{u}), \tag{6}$$

$$D(\mathbf{u}) < \beta S(\mathbf{u}), \tag{7}$$

где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — постоянные и

$$S(\mathbf{u}) = \int_\Omega \sum_{i,\,k=1}^{3} s_{ik}^2 \, d\Omega, \quad s_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right).$$

Неравенство (6) известно ([2]). В настоящей работе доказывается неравенство (7). Докажем, что (7) выполняется для всех $\mathbf{u} \in \overset{0}{D}_1$ и удовлетворяющих уравнению

$$\Delta\mathbf{u} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{8}$$

Тогда, рассуждая, как и в ([3]), получим, что (7) имеет место и в общем случае.

Предположим, что (7) не имеет места. Тогда существует такая последовательность функций $\mathbf{u}_m\,(u_{m1}, u_{m2}, u_{m3})$ из $\overset{0}{D}_1$, удовлетворяющих уравнению (8), что

$$\lim_{m\to\infty} S(\mathbf{u}_m) = 0\,, \tag{9}$$

$$D(\mathbf{u}_m) = 1. \tag{10}$$

Из (6)

$$H(\mathbf{u}_m) < \alpha. \tag{11}$$

В работе ([3]) доказано, что для всякой функции $\mathbf{u}$, удовлетворяющей уравнению (8), имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Omega_1} \sum_{i,k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega < \gamma \int\limits_{\Omega_2} \sum_{i=1}^{3} u_i^2\, d\Omega, \tag{12}$$

где область Ω_1 содержится вместе с границей в Ω_2, а Ω_2 в Ω, и постоянная γ зависит лишь от Ω_1 и Ω_2. Из (10) и (12) вытекает

$$\int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{3} \sum_{p+q+r=l} \left(\frac{\partial^l u_{mi}}{\partial x_1^p\, \partial x_2^q\, \partial x_3^r}\right)^2 d\Omega < c, \tag{13}$$

где Ω_0 — любая внутренняя подобласть области Ω и постоянная c зависит лишь от Ω_0 и l. Из (11) и (13) следует, согласно ([4]), что из последовательности $\mathbf{u}_m$ можно выделить подпоследовательность $\mathbf{u}_{m_\sigma}$, равномерно сходящуюся во всякой области $\Omega_0 \subset \Omega$ к некоторой функции $\mathbf{u}$ так, что и производные любого порядка от $\mathbf{u}_{m_\sigma}$ будут сходиться в том же смысле к соответствующим производным от $\mathbf{u}$. Перенумеруем по порядку все функции выделенной подпоследовательности, а все остальные $\mathbf{u}_m$ исключим из рассмотрения. Из (9) получим, что в Ω

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = 0, \quad i, k = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Из (10), (14) и того, что $\mathbf{u}_m \in \overset{0}{D}_1$, следует, как нетрудно показать, что в Ω $\mathbf{u} = 0$. Отсюда вытекает, что при $m \to \infty$ $D_{\Omega_0}(\mathbf{u}_m) \to 0$. Далее доказывается, что при $m \to \infty$ $D_Q(\mathbf{u}_m) \to 0$, где Q — некоторая пограничная полоса области Ω. При доказательстве используется следующее тождество из работы ([3]), справедливое для всех $\mathbf{u}$, удовлетворяющих уравнению (8):

$$\sum_{i,\,k=1}^{3} \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(r_{ik}^2 - s_{ik}^2) + 2\frac{\partial}{\partial x_k}(s_{ij}\, s_{ik} - 2s_{ii}\, s_{jk} - 2s_{ij}\, r_{ik} + s_{ik}\, r_{ij})\right] = 0,$$

где $j = 1, 2, 3$, $r_{ik} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$.

Окончательно получим, что при $m\to\infty$ $D(\mathbf{u}_m)\to 0$, что противоречит равенству (10).

2. Пусть теперь Γ состоит из двух частей Γ_2 и Γ_3. Рассмотрим задачу об отыскании решения уравнения (1) при краевых условиях (3) и (4).

Обозначим через $\dot{D}_2$ класс функций $\mathbf{u}$, принадлежащих D, непрерывных на Γ_2 и удовлетворяющих условию $u_n|_{\Gamma_2}=0$, а через $\overset{0}{D}_2$ обозначим замыкание пространства $\dot{D}_2$ по норме (5).

Для решения поставленной задачи доказывается, что, если исключить некоторые частные виды поверхности Γ_2, указанные ниже, для всякой функции $\mathbf{u}\in\overset{0}{D}_2$ имеют место неравенства (6) и (7).

В случае, когда Γ_2 является частью цилиндрической поверхности, образующую которой будем считать параллельной координатной оси OX_1, но не является плоскостью, неравенство (6) справедливо при дополнительном условии

$$\int\limits_{\Omega} u_1 d\Omega = 0.$$

В случае, когда Γ_2 — плоскость, которую будем считать параллельной осям OX_1 и OX_2, неравенство (6) имеет место при дополнительном условии

$$\int\limits_{\Omega} u_1 d\Omega = \int\limits_{\Omega} u_2 d\Omega = 0\,.$$

Назовем поверхность Γ_2 винтовой поверхностью с осью OX_3, если ее параметрические уравнения имеют вид:

$$x_1=\varphi(t_1)\cos t_2\,,\quad x_2=\varphi(t_1)\sin t_2,\quad x_3=at_2+\psi(t_1),$$

где a — постоянная. Если $a=0$, то Γ_2 — поверхность вращения; если, кроме того, $\psi(t_1)$ — постоянная, то Γ_2 — плоскость.

В случае, когда Γ_2 является частью винтовой поверхности (но не сферы), ось которой будем считать параллельной OX_3, неравенство (7) имеет место при дополнительном условии

$$\int\limits_{\Omega} r_{12} d\Omega = 0.$$

Если Γ_2 — часть сферы, то неравенство (7) имеет место при условии *

$$\int\limits_{\Omega} r_{ik}\, d\Omega = 0\,,\qquad i,k=1,2,3. \tag{15}$$

Заметим, что для единственности поставленной задачи в перечисленных частных случаях решение следует подчинить тем же дополнительным условиям, поэтому и в этих случаях неравенства (6) и (7) решают задачу. Оба неравенства доказываются как в основном случае, так и в особых случаях аналогично предыдущему.

---

* В этом случае нет необходимости требовать, чтобы $\mathbf{u}\in\overset{0}{D}_2$; достаточно, чтобы $\mathbf{u}\in D$.

З а м е ч а н и е. Случай, когда Γ_3 совпадает с Γ, рассмотрен в работе ([3]), где доказано неравенство (7) при условии (15). Доказательство, данное в этой работе, можно упростить, если воспользоваться рассуждениями, приведенными выше.

Ленинградский институт авиационного приборостроения

Поступило 18 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. М и х л и н, Прямые методы в математической физике, 1950. [2] С. Л. С о б о л е в, Матем. сборн., 2, 3, 467 (1937). [3] K. O. F r i e d r i c h s, Ann. Math., 48, 2, 441 (1947). [4] С. Л. С о б о л е в, ДАН, 1, 7 (1936).