Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

Б. В. ХВЕДЕЛИДЗЕ

О ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ В ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 16 XI 1950)

1. Пусть C обозначает конечную совокупность взаимно не пересекающихся простых разомкнутых дуг $C=\sum_{k=1}^{m} C_k$, касательная к которым составляет с определенным направлением на плоскости угол, удовлетворяющий, как функция точки кривой, условию Гельдера (условию H). Плоскость, разрезанную вдоль C, обозначим через D; граница C не причисляется к D. Концы дуг C_k, в каком-нибудь порядке, будем обозначать через $c_1, c_2, \ldots, c_{2m}$.

Пусть на C определена, вообще говоря, комплексная функция $\varphi(t)$; если функция $\varphi(t(s))$ измерима (где $t=t(s)$ — уравнение контура C, s — дуговая абсцисса точки t), а $|\varphi(t(s))|^p$ суммируема, то мы будем говорить, что $\varphi(t)$ принадлежит классу $L^p(C)$.

Точку $t_0 \in C$ мы будем называть точкой Лебега функции $\varphi(t)$, если соответствующая дуговая абсцисса s_0 есть точка Лебега функции $|\varphi(t(s))|$.

В дальнейшем через $\gamma_n(z)$ при $n \geqslant 0$ будем обозначать произвольный полином степени n, а при $n<0$ будем считать, что $\gamma_n(z)\equiv 0$.

Мы скажем, что функция $f(z)$ принадлежит классу $A_{n,p}(C)$, если: 1) $f(z)$ голоморфна в D; 2) на бесконечности имеет порядок n, т. е. в окрестности бесконечно удаленной точки $f(z)=O(z^n)$; 3) почти всюду вдоль C существуют пределы $f^+(t)$ и $f^-(t)$ функции $f(z)$, когда z по любым некасательным путям стремится к точке контура C, оставаясь, соответственно, слева или справа от C, и $f^{\pm}(t) \in L^p(C)$; 4) почти всюду на C имеет место равенство $S(f^+ - f^-) = f^+ + f^- + \gamma_n$, где

$$S\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in C,$$

а интеграл понимается в смысле главного значения Коши — Лебега.

Следуя Н. И. Мусхелишвили [1], введем еще несколько определений. Мы будем говорить, что $f(z)$ есть кусочно-голоморфная функция, если: 1) $f(z)$ голоморфна в D, кроме, быть может, точки $z=\infty$; 2) существует конечный предел, когда $|z-t|\to 0$, где t — произвольная фиксированная точка контура C, не совпадающая с его концами, а точка, стремящаяся к точке $t \in C$, все время остается слева или справа от C; 3) вблизи всех концов c_k имеем

$$|f(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c_k|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad k=1,\ldots,2m. \qquad (1)$$

Ясно, что класс $A_{n,p}(C)$ гораздо шире класса всех кусочно-голоморфных функций, имеющих на бесконечности порядок n [2].

Если функция $\varphi(t)$, заданная на C, удовлетворяет условию H на каждой закрытой части C, не содержащей концов, а вблизи любого конца c_k представима в виде $\varphi(t) = \varphi^*(t) / (t - c_k)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, где $\varphi^*(t)$ удовлетворяет условию H, то будем говорить, что $\varphi(t)$ принадлежит классу $H^*(C)$. Если, кроме того, $\varphi(t)$ вблизи концов $c_1, \ldots, c_r$ $(r \leqslant 2m)$ удовлетворяет условию H, то будем говорить, что $\varphi(t)$ принадлежит классу $h(c_1, \ldots, c_r)$.

Наконец, будем говорить, что функция $\varphi(t)$, определенная на C, принадлежит классу $I(C)$, если функция $\omega(\tau; \varphi) / \tau$, где $\omega(\tau; \varphi)$ — модуль непрерывности функции $\varphi(t)$, интегрируема на сегменте $[0, \varepsilon]$ при достаточно малом положительном ε. Некоторые свойства интеграла типа Коши с плотностью, принадлежащей классу $I(C)$, были изучены Л. Г. Магнарадзе [3, 4].

2. Лемма 1. *Для того чтобы $f(z) \in A_{n,p}(C)$, где $n \geqslant -1$, $p \geqslant 1$, необходимо, а при $f^\pm(t) \in L^p(C)$, $p \geqslant 1$, также достаточно, чтобы*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f^+(t) - f^-(t)}{t - z} dt + \gamma_n(z).$$

Лемма 2. *Для того чтобы $f(z) \in A_{n,p}(C)$, где $n < -1$, $p \geqslant 1$, необходимо, а при $f^\pm(t) \in L^p(C)$, $p \geqslant 1$, также достаточно, чтобы*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f^+(t) - f^-(t)}{t - z} dt,$$

$$\int t^k [f^+(t) - f^-(t)]\, dt = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, -n-2).$$

Лемма 3. *Если $f(z) \in A_{n,p}(C)$, $\varphi(z) \in A_{m,q}(C)$, где $p > 1$, $q = p / p-1$, то $f(z)\varphi(z) \in A_{n+m,1}(C)$.*

Леммы 1 и 2 легко вытекают из хорошо известных результатов И. И. Привалова [5], касающихся интегралов типа Коши; доказательство же леммы 3 опирается на формулу Пуанкаре — Бертрана

$$\int \frac{f(t)\, dt}{t - t_0} \int \frac{\varphi(t_1)\, dt_1}{t_1 - t} = -\pi^2 f(t_0) \varphi(t_0) + \int \varphi(t_1)\, dt_1 \int \frac{f(t)\, dt}{(t - t_0)(t_1 - t)}, \quad t_0 \in C,$$

справедливость которой можно установить [6], если $\varphi \in L^p(C)$, $f \in L^q(C)$ $p > 1$, $q = p / p-1$.

Лемма 4. *Если $\varphi(t) \in L(C)$ и $t_0 \in C$ есть точка Лебега функции $\varphi(t)$, то $\varphi(t) / |t - t_0|^\alpha \in L(C)$ при любом α, $0 < \alpha < 1$.*

Из этой леммы вытекает, что, если $\varphi(t) \in L(C)$, то существует множество $T(\varphi) \subset C$, мера которого равна длине контура C и такое, что при $t_0 \in T(\varphi)$ имеем $\varphi(t) / |t - t_0|^\alpha \in L(C)$ для любого α, $0 < \alpha < 1$.

Существование такого множества $T(\varphi)$ впервые иным путем было доказано Тонелли [7].

3. Рассмотрим теперь следующую граничную задачу теории функций комплексного переменного: найти функцию $\Phi(z)$, принадлежащую классу $A_{-1,p}(C)$, которая почти всюду на C удовлетворяет условию

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t), \tag{2}$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на C функции.

Эту задачу, следуя Н. И. Мусхелишвили [8], мы будем называть задачей линейного сопряжения. Соответствующие литературные указания см. [1]. Отметим лишь, что полное эффективное решение этой задачи в случае разомкнутых контуров, когда $g(t)$, $G(t)$ удовлетворяют условию H, а искомая функция кусочно-голоморфна, было дано Н. И. Мусхелишвили ([1, 9]). Эти результаты, на основании вышеприведенных лемм, можно несколько обобщить, а именно, как на заданные функции $g(t)$ и $G(t)$, так и на искомую функцию $\Phi(z)$ можно наложить указываемые ниже более общие условия.

Пусть функция $G(t)$, определенная на C, удовлетворяет следующим условиям: 1) $G(t) \neq 0$ и непрерывна на C_k $(k=1, \ldots, m)$; 2) на каждой закрытой части C, не содержащей концов, функция

$$\Gamma(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\ln G(t)\, dt}{t - t_0},$$

(где под $\ln G(t)$ понимается определенная ветвь многозначной функции, непрерывно изменяющаяся на каждой из дуг C_k) представляет собой измеримую и почти всюду ограниченную функцию; 3) вблизи концов c_k $(k=1, \ldots, 2m)$ на C имеем $\exp \Gamma(t) = (t - c_k)^{\alpha_k} \omega_k(t)$, где α_k — некоторые вещественные постоянные, а $\omega_k(t)$ и $\omega_k^{-1}(t)$ — измеримые и почти всюду ограниченные функции.

Легко видеть, что всегда можно подобрать такие целые числа λ_k, чтобы имело место одно из следующих неравенств:

$$-{}^1/_2 \leqslant \alpha_k + \lambda_k < {}^1/_2, \quad -{}^1/_2 < \alpha_k + \lambda_k \leqslant {}^1/_2. \tag{3}$$

Введем следующие обозначения:

$$\varkappa = -\sum_{k=1}^{2m} \lambda_k, \quad X(r) = \prod_{k=1}^{2m} (z - c_k)^{\lambda_k} \exp \Gamma(z)$$

и назовем $\varkappa$ индексом, а $X(z)$ — канонической функцией для функции $G(t)$ в классе $L^p(C)$. При этом, если $p < 2$, то числа λ_k мы будем определять с помощью первого, а если $p > 2$ — второго из условий (3). Поэтому легко видеть, что если $\varkappa$ и $X(z)$ — индекс и каноническая функция для $G(t)$ в классе $L^p(C)$, то индексом и канонической функцией для $G^{-1}(t)$ в классе $L^q(C)$, $q = p / p - 1$, будут, соответственно, $-\varkappa$ и $X^{-1}(z)$.

Мы будем говорить, что функция $G(t)$, определенная на C, принадлежит классу $B(C)$, если: 1) $G(t)$ удовлетворяет перечисленным выше трем условиям и 2) $X(z) \in A_{-\varkappa, p}(C)$, $[X(z)]^{-1} \in A_{\varkappa, q}(C)$, $p > 1$, $q = p / p - 1$.

Можно проверить, что если $G(t) \in H(C)$, то $G(t) \in B(C)$. Более того, если $G \in I(C)$ и вблизи концов c_k $(k = 1, \ldots, 2m)$ удовлетворяет условию H, то $G \in B(C)$.

Обозначим через ν наибольшее среди чисел $|\alpha_k + \lambda_k|$, $|\alpha_k + \lambda_k| < {}^1/_2$.

Предположим теперь, что $G \in B(C)$, $g \in L^p(C)$, где $(1 - \nu)^{-1} < p < 2$ и $c_k \in T(|g|^p)$, $k = 1, \ldots, 2m$. Тогда, если $\varkappa \geqslant 0$, все решения задачи (2) в классе $A_{-1, p}(C)$ представляются формулой

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int \frac{g(t)\, dt}{X^+(t)(t - z)} + X(z)\, \gamma_{\varkappa-1}(z). \tag{4}$$

Если $\varkappa < 0$, то задача (2) имеет решение в классе $A_{-1, p}(C)$ тогда и только тогда, когда соблюдены условия

$$\int g(t)\, [X^+(t)]^{-1}\, t^k\, dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1. \tag{5}$$

При выполнении этих условий решение (единственное) дается той же формулой (4) (в которой теперь $\gamma_{\varkappa-1} \equiv 0$, ибо $\varkappa - 1 < 0$).

4. Иногда требуется определить такое решение задачи (2), которое ограничено на некоторых заранее заданных концах c_k. В такой постановке эта задача, когда функции $g(t)$, $G(t)$ удовлетворяют условию H, а $\Phi(z)$ кусочно-голоморфна, изучена в работе ([10]). Эти результаты также можно несколько обобщить.

Действительно, предположим, что $G(t) \in I(C)$, $G(t) \neq 0$ всюду на C и, кроме того, $G(t)$ удовлетворяет условию H вблизи концов c_k $(k=1, \ldots, 2m)$. Пусть $\alpha_k = (2\pi)^{-1} \arg G(c_k)$. Всегда можно подобрать такие целые числа λ_k, чтобы

$$-1 < \alpha_k + \lambda_k < 1. \tag{6}$$

Назовем особенными те концы, на которых числа α_k целые, и неособенными остальные концы ([1]).

Будем говорить, что ([1]) кусочно-голоморфная функция $\Phi(z)$ принадлежит классу $h(c_1, \ldots, c_r)$, если она ограничена вблизи концов $c_1, \ldots, c_r$. Аналогично, мы скажем, что $\Phi(z) \in A_{-1, p}(c_1, \ldots, c_r)$, если $\Phi(z) \in A_{-1, p}(C)$ и ограничена вблизи концов $c_1, \ldots, c_r$.

Пусть $c_1, \ldots, c_s$ $(s \leqslant 2m)$ представляют все неособенные концы. Числа λ_k $(k=1, \ldots, r)$, соответствующие тем неособенным концам, на которых мы хотим добиться ограниченности решения, подчиним условию $0 < \alpha_k + \lambda_k < 1$, а остальные λ_k, соответствующие также неособенным концам, — условию $-1 < \alpha_k + \lambda_k < 0$.

Обозначим через ν_* наибольшее среди $|\alpha_k + \lambda_k|$ $(k=1, \ldots, 2m)$ и предположим, что $g(t) \in L^p(C)$, $1 < p < \nu_*^{-1}$, и вблизи концов c_k $(k=1, \ldots, r)$ удовлетворяет условию H. Кроме того, пусть $c_k \in T(|g|^p)$, $k = r+1, \ldots, s$. Тогда можно показать, что если $\varkappa \geqslant 0$, то все решения задачи (2), принадлежащие классу $A_{-1, p}(c_1, \ldots, c_r)$, представляются формулой (4). Если $\varkappa < 0$, то задача (2) имеет решение в классе $A_{-1, p}(c_1, \ldots, c_r)$ тогда и только тогда, когда соблюдены условия (5). При выполнении этих условий решение (единственное) дается той же формулой (4).

Предположим теперь, что $G(t) \neq 0$ всюду на C и принадлежит классу $H(C)$; $g(t) \in h(c_1, \ldots, c_r)$. Тогда, как известно ([1]), функция (4) будет принадлежать классу $h(c_1, \ldots, c_r)$. Таким образом, при этих условиях всякое решение класса $A_{-1, p}(c_1, \ldots, c_r)$ задачи (2) будет принадлежать классу $h(c_1, \ldots, c_r)$. В частности, всякое решение класса $A_{-1, p}(c_1, \ldots, c_r)$ вблизи точек c_k будет удовлетворять условию вида (1).

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук Груз.ССР

Поступило
25 X 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1946. [2] И. Н. Карцивадзе, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 18 (1950). [3] Л. Г. Магнарадзе, Сообщ. АН Груз. ССР, 8, 8 (1947). [4] Л. Г. Магнарадзе, ДАН, 68, 4 (1949). [5] И. И. Привалов, Граничные свойства однозначных аналитических функций, М., 1941. [6] Б. В. Хведелидзе, Сообщ. АН Груз. ССР, 8, 5 (1947). [7] L. Tonelli, Atti Accad. Naz. Lincei, 5, 8 (1927). [8] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., 1949. [9] Н. И. Мусхелишвили, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 10 (1941). [10] Н. И. Мусхелишвили и Д. А. Квеселава, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 11 (1942).